Prüfung **Mathematik 3 f. ET** **18. 2. 2021**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	8	
2.	8	
3.	7	
4.	8	
5.	9	
Summe	40	

Hinweise:

1. Lösungen sind **handschriftlich** auf Papier aufzuschreiben.
2. Benützen Sie eine **korrekte konsistente Notation** und achten Sie auf die **Lesbarkeit** ihrer Arbeit!
3. **Unterlagen sind nicht erlaubt.**
4. **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**
5. Die Arbeitszeit beträgt **2 Stunden**.
6. **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Antworten ohne Rechengang bzw. ohne Begründung bringen keine Punkte.
7. Die Angabe muss nicht nochmals abgeschrieben werden.
8. Nach dem Ende der Arbeitszeit muss die Prüfung **gescannt werden** und **innerhalb von 10 Minuten** als ein .pdf file an szmolyan@tuwien.ac.at gemailt werden.
9. **Falls nötig**, kann eine **mündliche online Nachbesprechung** der Prüfung stattfinden.

1. (8 Punkte) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{t}y' = t.$$

   (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Die lineare Unabhängigkeit ist nachzuweisen.

   (b) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung mittels Variation der Konstanten.

   (c) Geben Sie die allgemeine Lösung an.

   Hinweis zu (a): Setzen Sie zunächst $u := y'$ und lösen Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung für u.

2. (8 Punkte) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die gilt $\operatorname{div} v = 0$.

   (b) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die gilt $\operatorname{rot} v = 0$.

   (c) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die v ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie jeweils eine entsprechende Stammfunktion.

3. (7 Punkte) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Vollkegel

$$B := \{(x, y, z) : z^2 \geq x^2 + y^2\}$$

   und

$$\rho(x, y, z) = e^{-\alpha r^3},$$

   mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\alpha > 0$.

   (a) Beschreiben Sie B in Kugelkoordinaten.

   (b) Berechnen Sie

$$\int_B \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

4. (8 Punkte) Der beschränkte Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ wird durch die Flächen $x = y^2$, $z = 0$ und $x + z = 1$ begrenzt. Weiters sei

$$a(x, y, z) := (y^2 z, xz - y^2, 2yz + 3z)^T.$$

   (a) Skizzieren Sie B.

   (b) Berechnen Sie

$$\int_{\partial B} a \cdot dn$$

   wobei n der nach außen gerichtete Normalvektor von ∂B ist.

5. (a) (2 Punkte) Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Erklären Sie, wie man in diesem Fall unter Verwendung der dazugehörigen Eigenvektoren zwei linear unabhängige **reelle** Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = Ax$$

findet.

(b) (3 Punkte) Sei a ein stetig differenzierbares Vektorfeld im $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Erklären Sie detailliert unter Verwendung einer Skizze, warum die beiden Aussagen:

$$A_1 : \quad \int_C a \cdot dx \qquad \text{ist wegunabhängig}$$

und

$$A_2 : \quad \oint_C a \cdot dx = 0 \qquad \text{für alle geschlossenen Kurven } C$$

äquivalent sind.

(c) (4 Punkte) Sei $B = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. **Verifizieren** Sie für den Bereich B den Greenschen Satz für alle Vektorfelder v der Form

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$