Prüfung **Mathematik 3 f. ET** **29. 1. 2021**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	10	
2.	6	
3.	8	
4.	8	
5.	8	
Summe	40	

Hinweise:

1. Lösungen sind **handschriftlich** auf Papier aufzuschreiben.
2. **Unterlagen sind nicht erlaubt.**
3. **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**
4. Die Arbeitszeit beträgt **2 Stunden**.
5. **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Antworten ohne Rechengang bzw. ohne Begründung bringen keine Punkte.
6. Die Angabe muss nicht nochmals abgeschrieben werden.
7. Nach dem Ende der Arbeitszeit muss die Prüfung **gescannt werden** und **innerhalb von 10 Minuten** als ein .pdf file an **szmolyan@tuwien.ac.at** gemailt werden.
8. **Falls nötig**, kann eine **mündliche online Nachbesprechung** der Prüfung stattfinden.

1. (10 Punkte) Betrachtet wird die lineare Differentialgleichung

$$x'' + rx' + 4x = 0$$

mit Parameter $r \in [0, \infty)$.

Klassifizieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen in Hinblick auf Wachstum und dem Auftreten bzw. Fehlen von gedämpften und ungedämpften Oszillationen in Abhängigkeit vom Parameter r.

Berechnen Sie dazu die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ des charakteristischen Polynoms als Funktionen von r und geben Sie in allen Fällen ein reelles Fundamentalsystem an. Skizzieren Sie jeweils das Verhalten der Lösungen als Funktion der Zeit. Achten Sie besonders auf die Werte von r, an denen sich das qualitative Verhalten der Lösungen ändert.

2. (6 Punkte) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der DG

$$x' = Ax, \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine Skizze an, die das Verhalten aller Lösungen im $\mathbb{R}^2$ illustriert. Achten Sie dabei insbesondere auf die Ruhelage und Lösungen, die den Eigenräumen der Matrix A entsprechen.

3. (8 Punkte) Eine radialsymmetrische Ladungsdichte im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{1}{r^4}, & 1 \le r. \end{cases}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Berechnen Sie die im Halbraum $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0\}$ enthaltene Gesamtladung als uneigentliches Integral

$$\int_H \rho(x,y,z) d(x,y,z).$$

4. (8 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))^T := (0, xy)^T$$

im $\mathbb{R}^2$.

Weiters sei $a, b > 0$ und

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

Der Rand von G ist eine geschlossene Kurve C.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von C unter Verwendung von Ellipsenkoordinaten an.

(b) Berechnen Sie

$$\int_C v_1 dx + v_2 dy$$

i) direkt und ii) mit Hilfe des Satzes von Green.

5. Theoriefragen

(a) (3 Punkte) Sei A eine $n \times n$ Matrix. Definieren Sie

$$e^A$$

und bestimmen Sie (mit Begründung) für die Matrix A aus Aufgabe 2

$$\det\left(e^A\right).$$

(b) (2 Punkte) Sei $a(x, y, z)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld im $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Erklären Sie, warum die Integrabilitätsbedingung notwendig für die Existenz einer Stammfunktion von a ist. Ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend?

(c) (3 Punkte) Sei $x : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks F und $c : [a, b] \to B$ die Parameterdarstellung einer differenzierbaren Kurve in B mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Für die durch $w(t) := x \circ c(t)$ parametrisierte Flächenkurve $K \subset F$ gilt $w'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.