Prüfung **Mathematik 3 f. ET** **5. 3. 2021**

Matrikelnummer: **Name:**

Beispiel	mögliche Punkte	Punkte
1.	8	
2.	6	
3.	10	
4.	8	
5.	8	
Summe	40	

Hinweise:

1. Lösungen sind **handschriftlich** auf Papier aufzuschreiben.
2. Benützen Sie eine **korrekte konsistente Notation** und achten Sie auf die **Lesbarkeit** ihrer Arbeit!
3. **Unterlagen sind nicht erlaubt.**
4. **Einfache Taschenrechner (ohne Graphikdisplay, nicht programmierbar, ohne Gleichungslösern und Integralfunktionen) sind erlaubt.**
5. Die Arbeitszeit beträgt **2 Stunden**.
6. **Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein.** Antworten ohne Rechengang bzw. ohne Begründung bringen keine Punkte.
7. Die Angabe muss nicht nochmals abgeschrieben werden.
8. Nach dem Ende der Arbeitszeit muss die Prüfung **gescannt werden** und **innerhalb von 10 Minuten** als ein .pdf file an szmolyan@tuwien.ac.at gemailt werden.
9. **Falls nötig**, kann eine **mündliche online Nachbesprechung** der Prüfung stattfinden.

1. (8 Punkte) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der DG

$$x' = Ax, \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine Skizze an, die das Verhalten aller Lösungen im $\mathbb{R}^2$ illustriert.

2. (6 Punkte) Für welche Werte von $\omega \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichungen

$$x'' + 4x = \sin \omega t$$

Lösungen, die für $t \to \infty$ unbeschränkt sind?

3. (10 Punkte) Es sei $B \subset R^3$ definiert durch

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\}$$

Berechnen Sie mittels Integration

(a) Das Volumen von B

(b) den Flächeninhalt der Randfläche von B.

4. (8 Punkte) Sei $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ ein Quader im $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie für den Bereich B den Gaußschen Integralsatz für alle Vektorfelder a der Form

$$a(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(x, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f, g, h.

5. (a) (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $a : G \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Erklären Sie, warum die Integrabilitätsbedingung notwendig aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion von a ist.

   (b) (4 Punkte) Definieren Sie die Eigenschaft: der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist in y-Richtung projizierbarer. Wie kann man diese Eigenschaft bei der Berechnung eines Integrals

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$$

   benützen?