PRAKTISCHE MATHEMATIK 2

2.Test am 23.April 2007

Für alle Gruppen gilt der Hinweis:

Hinweis: Verwenden Sie zunächst den Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$, $x \neq 0$, um λ zu berechnen und dann die allgemeine Lösung $u(x)$ der homogenen Differentialgleichung anzugeben. Diese lautet

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{bzw.} \\ u(x) &= (c_1 x + c_2) e^{\lambda x} \quad \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \end{aligned}$$

Konstruieren Sie nun eine Fundamentallösung $U(x)$ indem Sie zwei Konstantenpaare c_1^-, c_2^- für $x < 0$, bzw. c_1^+, c_2^+ für $x > 0$ so bestimmen, dass $LU(x) = \delta(x)$ gilt.

Gruppe A

- Berechnen Sie eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$u'' - 2u' - 3u = 0.$$

$$\begin{aligned} u'' - 2u' - 3u &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\lambda x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\right) - 3e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 3e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_1 = -1 \qquad & \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; U(x) \; = \; \begin{cases} U_-(x) \; = \; c_1^- e^{-x} + c_2^- e^{3x} & \text{für } x < 0 \\ U_+(x) \; = \; c_1^+ e^{-x} + c_2^+ e^{3x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U_-(0) = U_+(0) \quad &\Rightarrow \quad c_1^- + c_2^- = c_1^+ + c_2^+ \\ U_-'(0) + 1 = U_+'(0) \quad &\Rightarrow \quad -c_1^- + 3c_2^- + 1 = -c_1^+ + 3c_2^+ \end{aligned}$$

Wählen wir $c_1^- = c_2^- = 0$, so erhalten wir $c_1^+ = -\frac{1}{4}$, $c_2^+ = \frac{1}{4}$ und damit

$$U(x) \; = \; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{3x} - e^{-x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Gruppe B

- Berechnen Sie eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$u'' - 4u' + 4u = 0.$$

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 4u &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\lambda x}\right) - 4\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\right) + 4e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ \lambda_1 = 2 \qquad & \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; U(x) \; = \; \begin{cases} U_-(x) \; = \; (c_1^- x + c_2^-) e^{2x} & \text{für } x < 0 \\ U_+(x) \; = \; (c_1^+ x + c_2^+) e^{2x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} U_-(0) = U_+(0) & \Rightarrow & c_2^- = c_2^+ \\ U_-'(0) + 1 = U_+'(0) & \Rightarrow & c_1^- + 2c_2^- + 1 = c_1^+ + 2c_2^+ \end{array}$$

Wählen wir $c_1^- = c_2^- = 0$, so erhalten wir $c_1^+ = 1,\ c_2^+ = 0$ und damit

$$U(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ xe^{2x} & x > 0 \end{cases}$$

Gruppe C

- Berechnen Sie eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$u'' + 2u' - 8u = 0.$$

$$\begin{aligned} u'' + 2u' - 8u &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\lambda x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\right) - 8e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 8 &= 0 \\ \lambda_1 = -4 \qquad & \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U(x) \;=\; \begin{cases} U_-(x) \;=\; c_1^- e^{-4x} + c_2^- e^{2x} & \text{für } x < 0 \\ U_+(x) \;=\; c_1^+ e^{-4x} + c_2^+ e^{2x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} U_-(0) = U_+(0) & \Rightarrow & c_1^- + c_2^- = c_1^+ + c_2^+ \\ U_-'(0) + 1 = U_+'(0) & \Rightarrow & -4c_1^- + 2c_2^- + 1 = -4c_1^+ + 2c_2^+ \end{array}$$

Wählen wir $c_1^- = c_2^- = 0$, so erhalten wir $c_1^+ = -\frac{1}{6},\ c_2^+ = \frac{1}{6}$ und damit

$$U(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6}\left(e^{2x} - e^{-4x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Gruppe D

- Berechnen Sie eine Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$u'' + 6u' + 9u = 0.$$

$$\begin{aligned} u'' + 6u' + 9u &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\lambda x}\right) + 6\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\right) + 9e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda x} + 6\lambda e^{\lambda x} + 9e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 &= 0 \\ \lambda_1 = -3 \qquad & \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U(x) \;=\; \begin{cases} U_-(x) \;=\; (c_1^- x + c_2^-)e^{-3x} & \text{für } x < 0 \\ U_+(x) \;=\; (c_1^+ x + c_2^+)e^{-3x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} U_-(0) = U_+(0) & \Rightarrow & c_2^- = c_2^+ \\ U_-'(0) + 1 = U_+'(0) & \Rightarrow & c_1^- - 3c_2^- + 1 = c_1^+ - 3c_2^+ \end{array}$$

Wählen wir $c_1^- = c_2^- = 0$, so erhalten wir $c_1^+ = 1,\ c_2^+ = 0$ und damit

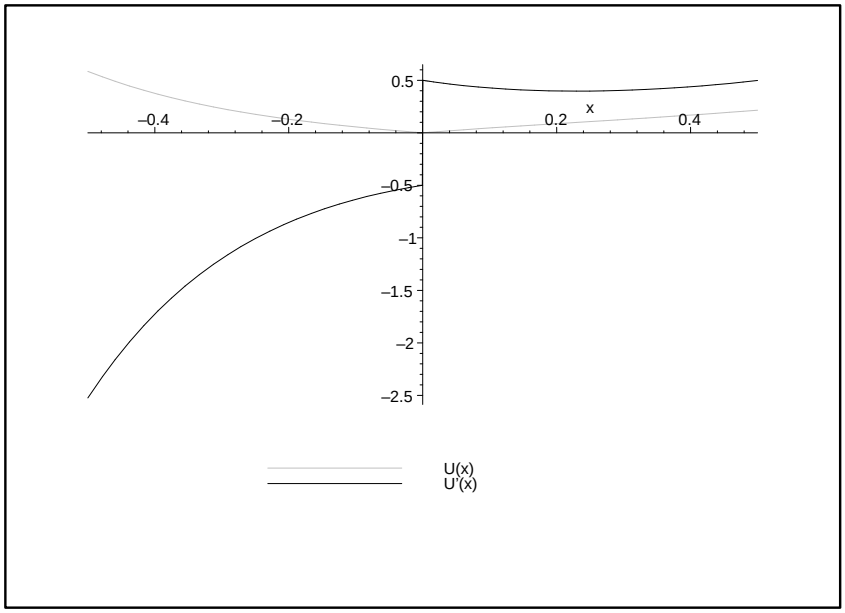
$$U(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ xe^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

Fehleranalyse

Ich muss gestehen, dass ich mich irgendwie nicht des Gefühls erwehren kann, dass ein enorm großer Teil der Leute einfach irgendetwas geschrieben hat, aber nicht wirklich einen Plan hatte, was sie da eigentlich tun. Ich werde mich natürlich hüten soetwas einzelnen Personen zu unterstellen, aber der Eindruck lässt sich nicht leugnen. Ich hab zwar auch für ausgesprochen abstruse Lösungsversuche Punkte vergeben, aber das ist trotzdem nicht Sinn und Zweck der Übung. Mir ist durchaus bewusst, dass das Kapitel über Fundamentallösung etwas verwirrend ist. Das liegt einfach daran, dass der mathematische Hintergrund dazu viel zu komplex ist, um in einer so kurzen Einführungsvorlesung genauer auf die Probleme einzugehen, aber darüber sollte man nicht gleich die grundlegenden mathematischen Fertigkeiten vergessen, die man schon in der Schule gelernt hat.

- Ein gutes Fünftel der Teilnehmer hat es nicht geschafft die quadratische Gleichung für λ richtig aufzulösen. Gut, meistens war es nur ein Vorzeichenfehler, aber dennoch. Bitte seht Euch die entsprechende Lösungsformel noch einmal an.

- Die beiden Gleichungen, die $U_-(x)$ und $U_+(x)$ erfüllen müssen, damit $U(x)$ eine Fundamentallösung ist, sind
$$U_-(0) = U_+(0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} U_+(\varepsilon) - U_-(\varepsilon) = 1.$$
Diese wurden auf alle möglichen Arten und Unarten verdreht und miteinander vermischt. Der häufigste Fehler dabei war das Vorzeichen bei der zweiten Gleichung.



Der Sprung um 1 muss immer vom Negativen ins Positive erfolgen, sonst erhält man $LU = -\delta$.

Desweiteren wurde oft darauf vergessen, dass bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung U unbedingt stetig sein muss. Enthält U bereits eine Sprungstelle, so enthält U' bereits eine δ-Distribution.

- Das Gleichungsystem für die 4 Koeffizienten besteht aus nur 2 Gleichungen, hat also 2 Freiheitsgrade. Das heißt aber nicht, dass jeder beliebige Koeefizient (oder jeder beliebige Kombination aus Koeffizienten) einen solchen Freiheitsgrad darstellt. Man muss bei der Wahl der Konstanten daher immer die Gleichungen im Auge behalten. Beim Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & c_1^- & + & & c_2^- & - & & c_1^+ & - & & c_2^+ & = & 0 \\ -2 & c_1^- & + & 4 & c_2^- & + & 2 & c_1^+ & - & 4 & c_2^+ & = & 1 \end{array} \qquad \text{(Gruppe C)}$$

ist z.B. die Wahl $c_1^- = c_1^+$ nicht zulässig, da sie das Gleichungssystem in

$$\begin{array}{rrcrcl} & c_2^- & - & & c_2^+ & = & 0 \\ 4 & c_2^- & - & 4 & c_2^+ & = & 1 \end{array}$$

überführen würde. Das würde allerdings bedeuten, dass $0 = c_2^- - c_2^+ = \frac{1}{4}$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist.

Auch beim Einsetzen einer Gleichung in die andere, also z.B:

$$-c_1^- + c_1^+ = c_2^- - c_2^+ \quad \rightarrow \quad 2(-c_1^- + c_1^+) + 4(c_2^- - c_2^+) = 1 \quad \Rightarrow \quad 6(-c_1^- + c_1^+) = 1$$

wurde oft vergessen, dass nicht jede Lösung der resultierenden Gleichung auch beide Ausgangsgleichungen erfüllt. Wählt man z.B. $c_1^- = 0$, so erhält man $c_1^+ = \frac{1}{6}$, $c_2^\pm$ kommt nicht mehr vor. Damit die ursprünglichen Gleichungen erfüllt sind muss aber immer noch

$$-c_1^- + c_1^+ = c_2^- - c_2^+ = \frac{1}{6}$$

gelten.

Ich weiß nicht in welcher Vorlesung lineare Gleichungssysteme behandelt wurden, aber das Kapitel sollten ca. 80% der Testteilnehmer nocheinmal durchgehen. Genau wie das Auflösen einer quadratischen Gleichung sollte das wirklich jeder noch aus der Schule können.

- Sehr viele Fehler sind auch beim Auswerten der Funktion an 0 passiert, einfach weil vergessen wurde für x 0 einzusetzen. Das führte dann auf Gleichungen wie

  $$c_1^- \cdot x + c_2^- = 0 \qquad \text{oder} \qquad c_1^- x e^{2x} + c_2^- e4x = 0.$$

  Wenn man eine Funktion $U(x)$ bestimmen will und man erhalt eine Gleichung für x, dann ist irgendetwas schief gelaufen und jedes weiterrechnen sinnlos. Hier empfiehlt es sich wirklich den Fehler zu suchen, oder wenn man weiß, dass man einfach nur einsetzen hätte müssen, dies sofort nachzuholen.

  Das Gleiche gilt übrigens (im Hinblick auf kommende Kurz- und Haupttests) auch für bestimmte Integrale. Nach dem Ausführen einer Integration $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y, ...)\, dy$ darf keine Variable y mehr vorkommen.

- Ein weiterer Punkt der leider oftmals nicht beherzigt wurde ist die Angabe. Viele haben eine Faltung der Fundamentallösung mit irgendwelchen Funktionen ausgerechnet. Das war nirgends verlangt.
  Auch der Hinweis zum Lösungsansatz in Abhängigkeit von λ wurde mehrfach ignoriert.