PRAKTISCHE MATHEMATIK 2

3.Test am 21.Mai 2007

Gruppe A

- Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem

$$\int_0^1 ((2y+y')^2 + y)\,dx \quad \rightarrow \quad min.$$

an und berechnen Sie jene Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, für die das oben angegebene Integral extremal wird.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung der Form

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad bzw. \qquad y'' - \lambda^2 y = 0$$

ist gegeben durch

$$y = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x \qquad bzw. \qquad y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Es muss nicht verifiziert werden, dass es sich bei dem berechneten Extremum tatsächlich um ein Minimum handelt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'} f(x,y,y')\right) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,y') \\
\frac{d}{dx}(4y + 2y') &= 8y + 4y' + 1 \\
4y' + 2y'' &= 8y + 4y' + 1 \\
y'' - 4y &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Eine Partikulärlösung ist durch $y(x) = -\frac{1}{8}$ sofort ersichtlich, die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{8}.$$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt

$$c_1 = \frac{e^2}{8}\frac{e^2-9}{e^4-1}, \qquad c_2 = \frac{1}{8}\frac{9e^2-1}{e^4-1}$$

Gruppe B

- Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem

$$\int_{-1}^1 (e^{2y+y'})\,dx \quad \rightarrow \quad min.$$

an und berechnen Sie jene Funktion $y(x)$ mit $y(-1) = y(1) = 0$, für die das oben angegebene Integral extremal wird.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung der Form

$$y'' + \lambda y' = 0$$

ist gegeben durch

$$y = c_1 + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Es muss nicht verifiziert werden, dass es sich bei dem berechneten Extremum tatsächlich um ein Minimum handelt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'} f(x,y,y')\right) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,y') \\
\frac{d}{dx}\left(e^{2y+y'}\right) &= 2e^{2y+y'} \\
e^{2y+y'}\frac{d}{dx}(2y+y') &= 2e^{2y+y'} \\
e^{2y+y'}(y''+2y'-2) &= 0 \\
y''+2y' &= 2
\end{aligned}$$

Eine Partikulärlösung ist durch $y(x) = x$ sofort ersichtlich, die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + x.$$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt

$$c_1 = \frac{e^4+1}{e^4-1}, \qquad c_2 = \frac{2e^2}{e^4-1}$$

Gruppe C

- Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem

$$\int_1^2 (y^2 + 2y + 6yy' + 9y'^2)\,dx \quad \rightarrow \quad min.$$

an und berechnen Sie jene Funktion $y(x)$ mit $y(1) = 1$, $y(2) = 0$, für die das oben angegebene Integral extremal wird.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung der Form

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad bzw. \qquad y'' - \lambda^2 y = 0$$

ist gegeben durch

$$y = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x \qquad bzw. \qquad y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Es muss nicht verifiziert werden, dass es sich bei dem berechneten Extremum tatsächlich um ein Minimum handelt.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}f(x,y,y')\right) &= \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,y') \\
\frac{d}{dx}\left(6y+18y'\right) &= 2y+2+6y' \\
6y'+18y'' &= 6y'+2y+2 \\
y''-\frac{1}{9}y &= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Eine Partikulärlösung ist durch $y(x) = -1$ sofort ersichtlich, die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{3}} + c_2 e^{\frac{x}{3}} - 1.$$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt

$$c_1 = e^{\frac{2}{3}}\frac{2e^{\frac{1}{3}}-1}{e^{\frac{2}{3}}-1}, \qquad c_2 = e^{-\frac{1}{3}}\frac{e^{\frac{1}{3}}-2}{e^{\frac{2}{3}}-1}$$

Gruppe D

- Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem

$$\int_{-1}^{0}(e^{y+3y'})\,dx \quad \rightarrow \quad min.$$

an und berechnen Sie jene Funktion $y(x)$ mit $y(-1) = 0$, $y(0) = 1$, für die das oben angegebene Integral extremal wird.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung der Form

$$y'' + \lambda y' = 0$$

ist gegeben durch

$$y = c_1 + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Es muss nicht verifiziert werden, dass es sich bei dem berechneten Extremum tatsächlich um ein Minimum handelt.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}f(x,y,y')\right) &= \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,y') \\
\frac{d}{dx}\left(3e^{y+3y'}\right) &= e^{y+3y'} \\
e^{y+3y'}\frac{d}{dx}(3y+9y') &= e^{y+3y'} \\
e^{y+3y'}(9y''+3y'-1) &= 0 \\
y''+\frac{1}{3}y' &= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Eine Partikulärlösung ist durch $y(x) = \frac{x}{3}$ sofort ersichtlich, die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x}{3}.$$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt

$$c_1 = -\frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}-1}, \qquad c_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}-1}$$