Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien SS 2009

Lösungen 1.Kurztest
Gruppe A-C

1. Gegeben sei ein Teil der Mantelfläche eines elliptischen Zylinders in Parameterdarstellung
$$F = \{(a\cos\varphi, b\sin\varphi, h\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le h \le 20\}$$
Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und den Normalvektor im Punkt $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $h_0 = 1$.
2. Sei nun $a = b = 2$. Betrachten Sie jene Teilfläche F_0 von F, die durch die Funktion
$$f(\varphi) = \sqrt{2+3\varphi^2} \quad \text{mit} \quad 0 \le h \le f(\varphi)$$
begrenzt wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche F_0.

Lösung:

1. Der Normalvektor im Punkt (φ_0, h_0) ergibt sich als Kreuzprodukt der Tangentialvektoren
$$\begin{pmatrix} -a\sin\varphi_0 \\ b\cos\varphi_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\varphi_0\cos\varphi_0 \\ a\varphi_0\sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Gruppe A: $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a\frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
Gruppe B: $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
Gruppe C: $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Der Maßtensor ergibt sich als
$$M(\varphi, h) = \begin{pmatrix} a^2+h^2 & \varphi h \\ \varphi h & \varphi^2. \end{pmatrix}$$
Und damit erhält man $|\mathbf{n}(\varphi, h)| = a\varphi$.
Gruppe A:
$$\begin{aligned} \int_{F_0} dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{f(\varphi)} a\varphi dh d\varphi = \int_0^{2\pi} a\varphi\sqrt{2+3\varphi^2}d\varphi = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{2+3\varphi^2} \\ dx = \frac{1}{x}3\varphi d\varphi. \end{array} \right| \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2+12\pi^2}} \frac{a}{3}x^2 dx = \frac{2}{9}\left(\sqrt{2+12\pi^2}^3 - \sqrt{2}^3\right) \end{aligned}$$
Gruppe B: Rechengang analog zu Gruppe A.
$$\int_{F_0} dS = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4\pi^2}^3 - 1\right)$$
Gruppe C:
$$\int_{F_0} dS = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+2\pi^2}^3 - 1\right)$$