Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien SS 2009

Lösungen 1.Kurztest
Gruppe A-C

1. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial G} \begin{pmatrix} xy^2 \\ y(x-1)^2 + \ln((2+x)z^2) \\ e^{x+y} \end{pmatrix} d\mathbf{S}$$

mittels Divergenzsatz von Gauß wobei G der von der Fläche $z = 2x - (x^2 + y^2) > 0$ und der xy-Ebene begrenzte Bereich ist.

Lösung:

1. Mittels Satz von Gauß ergibt sich

$$\int_{\partial G} \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_G (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV,$$

wobei sich G schreiben lässt als

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, 0 \leq z \leq 2x - x^2 - y^2\}.$$

Als Divergenz des Vektorfeldes erhält man $y^2 + (x-1)^2$ und das Integral wird nun zu

$$\int_G (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{2x-x^2-y^2} \left(y^2 + (x-1)^2\right) dz dy dx.$$

Verwendung von verschobenen Zylinderkoordinaten (Funktionaldeterminante $= r$) führt nun zu

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r^3 dh d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 r^3 - r^5 = \frac{\pi}{6}$$

Gruppe C lässt sich exakt genauso lösen nur mit vertauschten Reihenfolgen von x und y.
Bei Gruppe B ist die Divergenz des Vektorfeldes $3z(y^2 + (x-1)^2)$ und man erhält als Integral in Polarkoordinaten

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} 3zr^3 dh d\varphi dr = 3\pi \int_0^1 r^3(1-r^2)^2 dr = 3\pi \int_0^1 r^3 - 2r^5 + r^7 dr = \frac{\pi}{8}$$