Lösungen 3.Kurztest
Gruppe A-C

1. Finden Sie jene Funktion $y(x)$, die
$$I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4y^2 - y'^2 \, dx$$
unter den Randbedingungen $y(0) = 2$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ und der Nebenbedingung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y' + y \, dx = 0$ minimiert.

Lösung Gruppe A: Die Funktion h ist gegeben durch
$$h(y, y') = 4y^2 - y'^2 + \lambda(y' + y)$$
und somit erhält man durch Einsetzen in die Euler-Lagrange Gleichung
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial h}{\partial y} \\ -2y'' &= 8y + \lambda \end{aligned}$$
Diese lineare Differentialgleichung $2y'' + 8y = -\lambda$ hat die Eigenwerte $\pm 2i$ und somit erhält man als homogene Lösung
$$y_h(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x.$$
Eine partikuläre Lösung erhält man entweder durch Variation der Konstanten oder durch die Tatsache, dass eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität vorliegt und somit die partikuläre Lösung ebenfalls konstant sein muss. Hierfür erhält man also die Partikulärlösung
$$y_p(x) = -\frac{\lambda}{8},$$
und die gesamte Lösung
$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - \frac{\lambda}{8}.$$
Einsetzen in die Randbedingungen liefert für die Konstanten
$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Longrightarrow \quad c_2 - \frac{\lambda}{8} = 2 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -c_2 - \frac{\lambda}{8} = 0 \end{aligned}$$
und somit die Lösung
$$y(x) = c_1 \sin(2x) + \cos(2x) + 1$$
Einsetzen in die Nebenbedingung liefert nun c_1
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y' + y \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2c_1 + 1)\cos(2x) + (c_1 - 2)\sin(2x) + 1 dx = c_1 - 2 + \frac{\pi}{2} = 0,$$
also $c_1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ und damit $y(x) = (2 - \frac{\pi}{2})\sin(2x) + \cos 2x + 1$.

Lösung Gruppe B: $y(x) = \frac{6+12\pi}{8}\sin(3x) + 3\cos(3x) + 3$

Lösung Gruppe C: $y(x) = (3 - \pi)\sin(x) + 2\cos(x) + 2$