1. Finden Sie jene Funktion $y(x)$, die das Integral

$$I[y] = \int_1^2 \left(\frac{(3y)^2}{x} + xy'^2 + \ln(x) \right) \, dx$$

unter den Nebenbedingungen $y(1) = y(2) = 0$ und $\int_1^2 y(x) \, dx = 1$ minimiert.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = Cx^n$, um zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Euler-Lagrange-Gleichung zu finden, und setzen Sie die Partikulärlösung als $y(x) = Cx$ an.

Lösung:

$$h(x, y, y') = \frac{(3y)^2}{x} + xy'^2 + \ln(x) + \lambda y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} : \qquad \frac{\partial h}{\partial y'} = 2xy' \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{18y}{x} + \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx} 2xy' = 2x + 2xy'' \stackrel{!}{=} \frac{18y}{x} + \lambda$$

$$\Longleftrightarrow xy'' + y' - \frac{9y}{x} = \frac{\lambda}{2}$$

homogene Lösung: $y_h = Cx^n$

$$\begin{aligned} xn(n-1)x^{n-2}C + nx^{n-1}C - \tfrac{9Cx^n}{x} &= 0 \\ n(n-1)x^{n-1}C + nx^{n-1}C - 9Cx^{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow n^2 - n + n - 9 = n^2 - 9 = 0 \Rightarrow n &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-3} = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x^3}$$

inhomogene Lösung: $y_p = Cx$

$$C - \frac{9Cx}{x} - \frac{\lambda}{2} = -8C - \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow C = -\frac{\lambda}{16}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{\lambda}{16} x$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x^3} - \frac{\lambda}{16} x$$

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1 + C_2 - \tfrac{\lambda}{16} = 0 \Rightarrow C_1 = \tfrac{\lambda}{16} - C_2 \\ y(2) &= 8C_1 + \tfrac{C_2}{8} - 2\tfrac{\lambda}{16} = 0 \Rightarrow C_2 = \tfrac{\lambda}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 y(x) \, dx &= \int_1^2 \left(\tfrac{\lambda}{16} - C_2\right) x^3 + \tfrac{C_2}{x^3} - \tfrac{21C_2}{16} x \, dx = \\ &= \int_1^2 \tfrac{5C_2}{16} x^3 + \tfrac{C_2}{x^3} - \tfrac{21C_2}{16} x \, dx = -\tfrac{27}{64} C_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{64}{27} \quad \lambda = -\frac{448}{9} \quad C_1 = -\frac{20}{27}$$

$$y(x) = -\frac{20}{27} x^3 - \frac{64}{27x^3} - \frac{28}{9} x$$

Lösung Gruppe B:

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{\lambda}{6} x = -\frac{42}{13} x^2 - \frac{48}{13x^2} + \frac{90}{13} x$$

2. Man bestimme mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -3\frac{\partial u}{\partial x}, t > 0, -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k,t)} e^{ik\sigma(t,x)} dk$.

Lösung: Zunächst wird die Fouriertransformierte von $e^{-|x|}$ berechnet:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} = \frac{2}{1+k^2}\end{aligned}$$

Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet (siehe 4.27):

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -3(ik)\hat{u}$$

Daraus folgt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-3ikt}$$

Bestimmung des unbekannten Terms $c(k)$:

$$\begin{aligned}c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx \\ &= \frac{2}{1+k^2}\end{aligned}$$

Daraus folgt $\hat{u}(k,t) = \frac{2}{1+k^2}e^{-3ikt}$. Als letzter Schritt muss $\hat{u}(k,t)$ zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{-3ikt}e^{ikx}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik(-3t+x)}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}e^{ik\sigma(t,x)}dk \\ &= e^{-|\sigma(t,x)|} = e^{-|-3t+x|}\end{aligned}$$

Lösung Gruppe B: $\hat{u}(k,t) = \frac{6}{9+k^2}e^{2ikt}$, $u(x,t) = e^{-3|2t+x|}$

3. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \exp(-x)\cdot\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ und von $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\exp(-|x|)$.

$$\text{wobei } \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ , } falls\ x \in [0,\infty) \\ 0 \text{ , } sonst \end{cases}$$

Zeige weiters $g(x) = f(x) - f(-x)$ und bestimme daraus mit Hilfe der beiden Eigenschaften $\widehat{ah+bk} = a\hat{h} + b\hat{k}$ und $h(x) = \overline{k(-x)} \Rightarrow \hat{h}(y) = \overline{\hat{k}(y)}$ für $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{C}$ die Fouriertransformierte von $g(x)$ mithilfe von $f(x)$.

Lösung Gruppe A und B:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)\exp(-itx)\ dt = \int_0^{\infty} \exp(-t\cdot(1+ix))\ dt = \\ &= \exp(-t\cdot(1+ix))\left(-\tfrac{1}{1+ix}\right)_0^{\infty} = \tfrac{1}{1+ix} \end{aligned}$$

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\exp(x) & , x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t)\exp(-|t|)\exp(-itx)\ dt = \int_0^{\infty} \exp(-t)\exp(-itx)\ dt - \int_{-\infty}^{0} \exp(t)\exp(-itx)\ dt = \\ &= \tfrac{1}{1+ix} - \exp(t\cdot(1-ix))\left(\tfrac{1}{1-ix}\right)_{-\infty}^{0} = \tfrac{1}{1+ix} - \tfrac{1}{1-ix} = -\tfrac{2ix}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sgn}(x)\exp(-|x|) = \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) - \exp(x)\mathbb{I}_{(-\infty,0]}(x) = \\ &= \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) - \exp(x)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(-x) = f(x) - f(-x)\left(= f(x) - \overline{f(-x)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \widehat{f(x) - \overline{f(-x)}} = \hat{f}(x) - \widehat{\overline{f(-x)}} = \hat{f}(x) - \overline{\widehat{f(x)}} = \\ &= \tfrac{1}{1+ix} - \tfrac{1}{1-ix} = -\tfrac{2ix}{1+x^2} \end{aligned}$$