Lösungen zum 1. Test am 30.4.2012

1. (a) Sei $G = \left\{ \mathbf{r}\,(x,y) \,|\, (x,y) \in (0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$, wobei

$$\mathbf{r}\,(x,y) = \begin{pmatrix} a\cos(x)\cos(y) \\ a\sin(x)\cos(y) \\ a\sin(y) \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}^+$$

Beweisen Sie, dass es sich bei G um eine reguläre Fläche handelt. Weiters berechnen Sie den Flächeninhalt von G.

(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{a}\,(x,y,z) = (z^2, x, y)^T$ durch die Fläche $y = x^2 + z^2,\; 0 \leq \; y \leq c,\; c \in \mathbb{R}^+$

Hinweis: verwenden Sie die Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ a^2 \\ a\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Lösung:
Teil a): Es gilt zu zeigen, dass G ein reguläre Fläche ist. $\mathbf{r}\,(x,y)$ ist als Zusammensetzung von stetig differenzierbaren Funktionen, stetig differenzierbar. Die Vektoren:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\,(x,y) = a \cdot \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix} \; und \; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\,(x,y) = a \cdot \begin{pmatrix} -\cos(x)\sin(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix}$$

sind offensichtlich linear unabhängig, das heißt man kann einen der beiden Vektoren nicht als Linearkombination des anderen schreiben. Somit ist G eine reguläre Fläche.
Der Flächeninhalt von G ist gegeben durch:

$$\int_G dS := \int_{[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \|\mathbf{n}(x,y)\| \; d(x,y) = \int_{[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \sqrt{det\; M(x,y)} \; d(x,y) \tag{1}$$

Der Maßtensor ist gegeben durch: $M(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \end{pmatrix} = a^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2(y) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sqrt{det\; M(x,y)} = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 \cdot \cos^2(y) & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{a^4 \cdot \cos^2(y)} = a^2 \cdot \cos(y) \tag{2}$$

Jetzt können wir (2) in (1) einsetzen und erhalten:

$$\int_{[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \sqrt{det\; M(x,y)} \; d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cdot \cos(y) \; dydx = \int_0^{2\pi} 2 \cdot a^2 \; dx = 4a^2\pi$$

Gruppe A: $a = \frac{1}{3}e \Rightarrow G = \frac{4}{9}e^2\pi$
Gruppe B: $a = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow G = \frac{1}{\pi}$

Teil b): Wir wählen die Parameterdarstellung mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq a \leq \sqrt{c}$:

$$\mathbf{r}(\varphi, a) = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ a^2 \\ a\sin(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}\,(\mathbf{r}(\varphi,a)) = \begin{pmatrix} a^2\sin^2(\varphi) \\ a\cos(\varphi) \\ a^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Der Normalvektor ist damit gegeben durch:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \begin{pmatrix} -a\sin(\varphi) \\ 0 \\ a\cos(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2a \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2\cos(\varphi) \\ a \\ -2a^2\sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Aus (4) und (3) folgt somit:

$$\int_0^{\sqrt{c}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a^2 \sin^2(\varphi) \\ a\cos(\varphi) \\ a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2a^2 \cos(\varphi) \\ a \\ -2a^2 \sin(\varphi) \end{pmatrix} \, d\varphi dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{c}} \int_0^{2\pi} \left(-2a^4 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) + a^2 \cos(\varphi) - 2a^4 \sin(\varphi)\right) \, d\varphi dr = 0$$

2. (a) Zeigen Sie, dass die homogene Lösung der Differentialgleichung

$$Lu = u^{(3)} - u'' - 6u'$$

folgende Gestalt hat:

$$u_h(x) = A + Be^{3x} + Ce^{-2x}.$$

(b) Des Weiteren zeigen Sie, dass die Fundamentallösung in der nachstehenden Form dargestellt werden kann:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{3x} + \frac{1}{10}e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

(c) Damit berechne man eine Partikulärlösung der Differentialgleichung $Lu = f(x)$ mit $f(x) = e^{4x}$

Hinweis: Um die homogene Lösung zu finden, machen Sie den Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$.

Lösung:
Die Eigenwerte dieser linearen Differentialgleichung 3. Ordnung sind die Nullstellen von $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$, sprich $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$. Als Lösung erhält man

$$U(x) = A + Be^{3x} + Ce^{-2x}$$

Ein stückweiser Ansatz für $x < 0$ und $x > 0$ liefert

$$U(x) = \begin{cases} A_- + B_-e^{3x} + C_-e^{-2x} & x < 0 \\ A_+ + B_+e^{3x} + C_+e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass U und U' stetig und U'' bei 0 einen Sprung der Höhe 1 hat, folgt

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{3x} + \frac{1}{10}e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

Die Partikulärlösung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} u_p(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\zeta)f(\zeta)d\zeta &= \int_{-\infty}^{x} (-\frac{1}{6} + \frac{1}{15}e^{3(x-\zeta)} + \frac{1}{10}e^{-2(x-\zeta)})e^{4\zeta}d\zeta \\ &= -\frac{1}{24}e^{4x} + \frac{1}{15}e^{3x}\int_{-\infty}^{x} e^{\zeta}d\zeta + \frac{1}{10}e^{-2x}\int_{-\infty}^{x} e^{6\zeta}d\zeta \\ &= (-\frac{1}{24} + \frac{1}{15})e^{4x} + \frac{1}{60}e^{4x} \\ &= \frac{1}{24}e^{4x} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: $u = u_h + u_p$

Lösung Gruppe B:

$u_p(x) = \frac{1}{36}e^{3x}$
Insgesamt folgt: $u = u_h + u_p$

3. Es sei $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < a^2,\ 0 < z < b\right\}$ mit $a^2, b \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

   (a) Geben Sie den Rand von F an (∂F) und überprüfen Sie die Voraussetzungen des Divergenzsatzes für ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$

   Weiters geben Sie den normierten Normalvektor des Zylinderdeckels an.

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes das Flussintegral $\int_{\partial F} \mathbf{f}\, dS$

Lösung:
Teil a): Der Rand von F ist gegeben durch:

$$\partial F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ z \in \{0, b\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2,\ z \in (0, b) \right\}$$

Da der Abschluss von F kompakt ist und zwei beliebige Punkte in der Menge durch eine Kurve verbunden werden können, die ganz in F liegt (reicht eine Gerade von a nach b bzgl. der euklidischen Norm), ist F als offene Menge ein beschränktes Gebiet im dreidimensionalen Raum. Der Rand von F besteht aus drei regulären, orientierbaren Flächen (Deckel - oben und unten und aus dem Mantel). $\mathbf{f}$ ist als Zusammensetzung stetig differenzierbarer Abbildungen, stetig differenzierbar. Somit sind die Voraussetzungen für den Divergenzsatz erfüllt. Der normierte Normalvektor ist gegeben durch: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teil b): Somit kann das Flussintegral wie folgt berechnet werden:

$$\int_{\partial F} \mathbf{f}\, dS = \int_F (div\ \mathbf{f})\ dV = \int_F 4z\ dV = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^a 4zr\ dr d\varphi dz = 2b^2 a^2 \pi$$

Gruppe A: $a = \frac{1}{4},\ b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{1}{8} b^2 \pi$
Gruppe B: $b = 10,\ a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 200 a^2 \pi$