Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe B (Fr, 20.06.2014) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ••

- **Aufgabe 1.**

a) (5 Punkte) Lösen sie das Randwertproblem für $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$
$$u(\pi/2, t) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -1$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\cos(3x) - 2\cos(5x) - x + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Um eine symmetrische Problemstellung zu erhalten benötigen wir die Transformation

$$v(x,t) = u(x,t) + kx + d$$

mit $v(\pi/2,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0$.
Es ergeben sich folgende Gleichungen zum Lösen der Unbekannten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k = -1 + k \quad \Rightarrow k = 1 \\
0 &= v(\pi/2,t) = u(\pi/2,t) + k\frac{\pi}{2} + d = -1 + \frac{\pi}{2} + d \quad \Rightarrow d = 1 - \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \quad v(x,t) = u(x,t) + x + 1 - \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \quad v(x,0) = u(x,0) + x + 1 - \frac{\pi}{2} = 5\cos(3x) - 2\cos(5x)
\end{aligned}$$

Wir verwenden den Ansatz $v(x,t) = \Psi(x)T(t)$

$$\begin{aligned}
\Psi(x)T'(t) &= \Psi''(x)T(t) \\
\frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi''(x) = \lambda\Psi(x), \qquad \Psi(\pi/2) = \Psi'(0) = 0 \\
\Rightarrow \lambda < 0, \quad \Psi(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x) \\
0 = \Psi'(0) = b\sqrt{-\lambda} \Rightarrow b = 0, \ \Psi(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) \\
0 = \Psi(\pi/2) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi/2) \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{-\lambda}\pi/2 = \pi\,(k - 1/2)\,, \ k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow -\lambda_k = (2k-1)^{\frac{1}{2}}\,, \ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

für $T(t)$ gilt

$$T_j'(t) = \lambda_j T_j(t) \ \Rightarrow \ T_j(t) = e^{\lambda_j t} T_j(0)$$

daher gilt

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) e^{\lambda_j t} \cos\left((2j-1)\,x\right)$$

Zur Berechnung der Konstanten verwenden wir $v(x,0)$.

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) e^{\lambda_j t} \cos\left((2j-1)\,x\right) \\ -5\cos((4-1)x) - 2\cos((6-1)x) &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \cos\left((2j-1)\,x\right) \\ &\Rightarrow \quad T_2 = -1, \quad T_3 = 2 \end{aligned}$$

Alternativ zeigen sie

$$\int_0^{\pi} /2 \cos\left((2k-1)\,x\right) \cos\left((2j-1)\,x\right) dx = \delta_{kj} \frac{\pi}{4}$$

$v(x,0)$ und die Löesung bei $t=0$ werden dann mit $\cos\left((2k-1)\,x\right)$ multipliziert und aufintegriert.

$$\begin{aligned} & v(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) e^{\lambda_j t} \cos\left((2j-1)\,x\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall k \in \mathbb{N}: \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x,0) \cos\left((2k-1)\,x\right) dx \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \cos\left((2j-1)\,x\right) \cos\left((2k-1)\,x\right) dx \\ \Leftrightarrow \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x,0) \cos\left((2j-1)\,x\right) dx = T_k(0) \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \quad & T_2 = 5, \quad T_3 = -2 \end{aligned}$$

und $T_k = 0$, $k \neq 2,3$.Die Lösung ergibt sich daher, für λ_k wie oben definiert, aus

$$\begin{aligned} v(x,t) &= 5e^{\lambda_2 t}\cos(3x) - 2e^{\lambda_3 t}\cos(5x) \\ u(x,t) &= 5e^{\lambda_2 t}\cos(3x) - 2e^{\lambda_3 t}\cos(5x) - x + \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

b) (1 Punkt) Sei $u(x,t)$ die Lösung des Randwertproblems aus a). Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Da alle $\lambda_k < 0$ sind, gilt $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und somit

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = -x + \frac{\pi}{2} - 1.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie ohne Verwendung von b), dass die Fourier- Transformierte der Funktion $f(x) = (2+x)e^{-|x|}$ existiert, d.h., zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ gilt.

Hinweis: $\displaystyle\int xe^{ax}dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}, \quad$ *für* $a = const.$

Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$, so existiert die Fourier- Transformierte $\hat{f}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |(2+x)e^{-|x|}|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |2+x|e^{-|x|}\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{-2} -(2+x)e^{x}\, dx + \int_{-2}^{0} (2+x)e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} (2+x)e^{-x}\, dx = \\
&= -(2+x)e^{x}\Big|_{-\infty}^{-2} + \int_{-\infty}^{-2} e^{x}\, dx + (2+x)e^{x}\Big|_{-2}^{0} - \\
&- \int_{-2}^{0} e^{x}\, dx + (-(2+x))e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \\
&= e^{x}\Big|_{-\infty}^{-2} + 2 - e^{x}\Big|_{-2}^{0} + 2 + (-e^{-x})\Big|_{0}^{\infty} = 4 + 2e^{-2}.
\end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Fourier- Transformierte der Funktion $f(x) = (2+x)e^{-|x|}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2+x)e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{0} (2+x)e^{x(1-ik)}\,dx + \int_{0}^{\infty} (2+x)e^{-x(1+ik)}\,dx = \\
&= (2+x)\frac{e^{x(1-ik)}}{1-ik}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1-ik}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ik)}\,dx - \\
&- (2+x)\frac{e^{-x(1+ik)}}{1+ik}\bigg|_{0}^{\infty} + \frac{1}{1+ik}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1+ik)}\,dx = \\
&= \frac{2}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2}e^{x(1-ik)}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{2}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2}e^{-x(1+ik)}\bigg|_{0}^{\infty} = \\
&= \frac{2}{1-ik} - \frac{1}{(1-ik)^2} + \frac{2}{1+ik} + \frac{1}{(1+ik)^2}.
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\hat{f}(k) = \frac{4(1-ik+k^2)}{(1+k^2)^2}
$$

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist - bis auf einen Vorfaktor - invariant unter Fourier- Transformation, d.h. es gilt $\hat{f}(k) = ae^{-k^2/2}$, mit einer Konstante a.

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\, dt = \sqrt{2\pi}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2ikx+x^2)}\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2-\frac{1}{2}k^2}\, dx = \\
&= e^{-\frac{1}{2}k^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\, dx}_{=\sqrt{2\pi}} = \\
&= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}k^2}.
\end{aligned}
$$

- **Aufgabe 3.**

a) (1 Punkt) Geben sie die Euler-Lagrange-Gleichung für folgendes Problem an

$$I[y] = \int_{-\pi}^{3\pi/4} -2y^2 + 2y - 8yy' + \frac{1}{2}(y')^2 \to \min \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\
-4y + 2 - 8y' &= \frac{\partial}{\partial x}(-8y + y') \\
-4y + 2 - 8y' &= -8y' + y'' \\
y'' &= -4y + 2
\end{aligned}$$

b) (5 Punkte) Finden Sie die reele Kurve $y(x)$ mit $y(-\pi) = 2$, $y(3\pi/4) = -1$, die (1) minimiert
Hinweis:
$\cos(2k\pi) = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$,
$\cos(2k\pi + \pi) = \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$ und
$\sin(k\pi) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Die allgemeine reele Lösung von $y'' = -4y$ ist

$$y_h = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

Eine partikulär Lösung von $y'' = -4y + 2$ ergibt sich mit dem Ansatz $y_p(x) = c$

$$\begin{aligned}
0 &= -4c + 2 \\
c &= 1/2
\end{aligned}$$

Daraus folgt $y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x) + \frac{1}{2}$.

Zur Berechnung der Konstanten benötigt man den Hinweis und die Randbedingungen $x = -\pi$

$$\begin{aligned} 2 = y(-\pi) = a\cos(-2\pi) + b\sin(-2\pi) + \frac{1}{2} &= a + \frac{1}{2} \\ a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und $x = 3\pi/4$

$$\begin{aligned} -1 = y(3\pi/4) = a\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + b\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} &= -b + \frac{1}{2} \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$y(x) = \frac{3}{2}\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}$$