Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2015

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe B (Mo, 11.05.2015) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

- **Aufgabe 1.**

(6 Punkte) <u>Satz von Gauß</u>

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral

$$\int_{\partial C} \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - 2z \\ y^2 + x + 2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S},$$

wobei C der durch $y^2 + (x-2)^2 \leq 9$ und $-2 \leq z \leq 2$ bestimmte Zylinder ist.

Das Integral kann mit Hilfe des Satzes von Gauß auf folgende Form umgeschrieben werden:

$$\int_{\partial C} \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - 2z \\ y^2 + x + 2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \bigtriangledown \cdot \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - 2z \\ y^2 + x + 2 \end{pmatrix} dV.$$

Das entspricht

$$\int_C \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 - 6x^2 \\ y^3 - 2z \\ y^2 + x + 2 \end{pmatrix} dV = \int_C (3x^2 - 12x + 3y^2)\, dV.$$

Nun müssen die Integralgrenzen bestimmt werden.
Aus der Symmetrie des Körpers folgt die Annahme, dass Rechnen mit Zylinderkoordinaten von Vorteil ist. Weiters erkennt man aus der Bedingung $y^2 + (x-2)^2 \leq 9$, dass die Achse des Zylinders um 2 vom Mittelpunkt abweicht. Daher verwenden wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\phi) + 2 \\ r\cos(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in obige Bedingung liefert:

$$y^2 + (x-2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow r^2\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\phi) \leq 4 \Rightarrow r \leq 3.$$

Als Grenzen des Integral erhalten wir $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $-2 \leq z \leq 2$ und es folgt

$$\int_{-2}^{2} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3(r\sin(\phi) + 2)^2 + 3r^2\cos^2(\phi) - 12(r\sin(\phi) + 2))r dr d\phi dz,$$

wobei wir $dV = dxdydz = rdrd\phi dz$ verwenden.
Unter Verwendung von $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ vereinfacht sich der Ausdruck unter dem Integral zu

$$\int_{-2}^{2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 rdr(3r^2 - 12).$$

Die Berechnung des Integrals liefert

$$z\Big|_{-2}^{2}\,\phi\Big|_{0}^{2\pi}\int_0^3 (3r^3-12r)dr = 4\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{3}{4}r^4-\frac{12}{2}r^2\right)\Big|_0^3.$$

Dies führt schließlich zu dem Ergebnis

$$\int_{\partial C}\begin{pmatrix} x^3-6x^2 \\ y^3-2z \\ y^2+x+2 \end{pmatrix}\cdot d\mathbf{S} = 54\pi.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (4 Punkte) Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -1 < x < 1, \\ \frac{2}{x^4}, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 + 3.$$

Berechnen Sie die Konvolution $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$.
Hinweis: Substituieren Sie $u = x - \xi$.

Es gilt

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi = 2\int_{-\infty}^{-1} \frac{\xi^2+3}{(x-\xi)^4}d\xi + \int_{-1}^{1} \xi^2 + 3d\xi + 2\int_{1}^{\infty} \frac{\xi^2+3}{(x-\xi)^4}d\xi.$$

Berechnung des mittleren Integrals führt auf

$$\int_{-1}^{1} \xi^2 + 3d\xi = \frac{\xi^3}{3} + 3\xi\Big|_{-1}^{1} = \frac{20}{3}.$$

Das erste Integral lässt sich durch die im Hinweis angegebene Substitution berechnen,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{\xi^2+3}{(x-\xi)^4}d\xi \overset{u = x - \xi}{=} & -\int_{-\infty}^{x+1} \frac{(x-u)^2+3}{u^4}du = -\int_{-\infty}^{x+1} \frac{x^2-2xu+u^2+3}{u^4}du \\
= & -\int_{-\infty}^{x+1} \frac{x^2}{u^4}du + \int_{-\infty}^{x+1} \frac{2x}{u^3}du - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{1}{u^2}du - \int_{-\infty}^{x+1} \frac{3}{u^4}du \\
= & \left[\frac{x^2}{3u^3} - \frac{x}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{3}{3u^3}\right]_{-\infty}^{x+1} = \left[\frac{x^2-3ux+3u^2+3}{3u^3}\right]_{-\infty}^{x+1} \\
= & \frac{x^2+3x+6}{3(x+1)^3}.
\end{aligned}$$

Im letzten Integral müssen nur noch die richtigen Grenzen eingesetzt werden

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\xi^2+3}{(x-\xi)^4}d\xi = \left[\frac{x^2-3ux+3u^2+3}{3u^3}\right]_{x-1}^{\infty} = -\frac{x^2-3x+6}{3(x-1)^3}.$$

Somit gilt

$$(f * g)(x) = \frac{2(x^2+3x+6)}{3(x+1)^3} + \frac{20}{3} - \frac{2(x^2-3x+6)}{3(x-1)^3}.$$

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$Lu = u'' + 2u' = 0$$

folgende Gestalt hat:

$$u_h = A + Be^{-2x}.$$

Um dies zu zeigen, müssen wir nur die Lösung u_h in die Differentialgleichung einsetzen:

$$u_h'' + 2u_h' = (A + Be^{-2x})'' + 2(A + Be^{-2x})' = 4Be^{-2x} - 4Be^{-2x} = 0.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fundamentallösung von $LU = \delta$, die sowohl die Standardbedingungen als auch die zusätzliche Forderung $\lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$ erfüllt.

Der allgemeine Ansatz für die Fundamentallösung lautet,

$$U(x) = \begin{cases} A_- + B_- e^{-2x}, & x < 0 \\ A_+ + B_+ e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$

Durch die Forderung $\lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$ erhalten wir $A_- = B_- = 0$.
Damit $U(x)$ Fundamentallösung ist, muss gelten: U ist stetig an der Stelle $x = 0$ und $U'(x)$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Sprung der Höhe 1.

Es muss somit gelten:

U' hat an der Stelle Null einen Sprung der Höhe 1: $-2B_+e^0 = 1 \Rightarrow B_+ = -\frac{1}{2}$,

U ist stetig in Null: $A_+ - \frac{1}{2}e^0 = A_+ - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A_+ = \frac{1}{2}$.

Die Fundamentallösung lautet somit:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

- **Aufgabe 3.**

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie das Kurvenintegral des auf dem Gebiet $D := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{v} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y \in (-\infty, 0]\}$ definierten Vektorfelds

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)} + xz \\ \frac{y}{(x^2+y^2)} + yz \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

längs der Kurve

$$\mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} L\sin(u) \\ L\cos(u) \\ \frac{3u}{\pi} \end{pmatrix}, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad L = const.$$

Das Kurvenintegral berechnet man nach der folgenden Formel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathbf{G}(x(u), y(u), z(u)) \cdot \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{pmatrix} du.$$

Die Berechnung des Tangentialvektors der Kurve ergibt

$$\mathbf{T}(x(u), y(u), z(u)) = \dot{\mathbf{r}}(u) = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \\ z'(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\cos(u) \\ -L\sin(u) \\ \frac{3}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Das Einsetzen der Parametrisierung ergibt unter Verwendung von $1 = \sin^2(u) + \cos^2(u)$

$$\mathbf{G}(x(u), y(u), z(u)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\sin(u) + \frac{3L}{\pi}u\sin(u) \\ \frac{1}{L}\cos(u) + \frac{3L}{\pi}u\cos(u) \\ \frac{1}{2}L^2 \end{pmatrix}$$

also insgesamt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} [\frac{1}{L}\sin(u) + \frac{3L}{\pi}u\sin(u)]L\cos(u) - [\frac{1}{L}\cos(u) + \frac{3L}{\pi}u\cos(u)]L\sin(u) + \frac{3L^2}{2\pi}du$$

und vereinfacht

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{3L^2}{2\pi}du = \frac{3L^2}{4}.$$

b) (3 Punkte)
Untersuchen Sie das Vektorfeld $\mathbf{G}$ aus Punkt a).
(i) Finden Sie das größte einfach zusammenhängende Gebiet, auf dem $\mathbf{G}$ rotationsfrei ist.
(ii) Bestimmen Sie das Potential von $\mathbf{G}$ in diesem Gebiet.
(iii) Welches Ergebnis erwarten Sie für das Kurvenintegral des Vektorfeldes längs der Kurve $\boldsymbol{\omega}$,

$$\boldsymbol{\omega}(u) = \begin{pmatrix} uL \\ L(u+1) \\ \frac{3}{2}u \end{pmatrix}, \quad u \in [-1, 0] \ ?$$

Vergleichen Sie dazu die Kurve $\boldsymbol{\omega}$ mit der Kurve $\mathbf{r}$ aus Aufgabenteil a).
Hinweis: $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$

(i)

$$\text{rot } \mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \partial_2 G_3 - \partial_3 G_2 \\ \partial_3 G_1 - \partial_1 G_3 \\ \partial_1 G_2 - \partial_2 G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - y \\ x - x \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit obiger Gleichung findet man, dass $\mathbf{G}$ auf dem ganzen Definitionsbereich, also auf $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{v} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y \in (-\infty, 0]\}$ rotationsfrei ist. Der Definitionsbereich ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Damit ist $\mathbf{G}$ ein Gradientenfeld und ein Potential existiert auf D.
(ii)
Für das Potential Φ gilt: $\mathbf{G} = \nabla\Phi$.
Zur Berechnung des Potentials integrieren wir G_1 nach x und erhalten unter Beachtung des Hinweises:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}x^2 z + c(y, z).$$

Es muss aber auch $\frac{\partial}{\partial y}\Phi_y = G_2$ gelten,

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y}c(y, z) \stackrel{!}{=} \frac{y}{x^2 + y^2} + yz.$$

Also ist $c(y, z) = \frac{1}{2}y^2 z + \tilde{c}(z)$. Zusätzlich muss $\frac{\partial}{\partial z}\Phi_z = G_3$ sein und wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi_z(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\partial}{\partial y}\tilde{c}(z) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Also ist $\tilde{c}(z) = \tilde{\tilde{c}}$ und das Potential von $\mathbf{G}$ ergibt sich zu:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \frac{z}{2}(x^2 + y^2) + \tilde{\tilde{c}}.$$

(iii)
Das Kurvenintegral kann ohne explizite Berchnung bestimmt werden. Die Anfangs- und Endpunkte der Kurven $\mathbf{r}$ aus Punkt a) und $\boldsymbol{\omega}$ aus Punkt b) stimmen überein und da Kurvenintegrale von Gradientenfeldern wegunabhängig sind, ergibt sich

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathbf{G}(\boldsymbol{\omega}(u)) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}(u) du = \int_{-1}^{0} \mathbf{G}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tau) d\tau.$$