Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe B (Fr, 19.06.2015) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

• **Aufgabe 1.**
Gesucht ist die Funktion $r(t)$, die das Integral,

$$I[r(t)] = \int_0^{3\pi} -r^2 - 18r + 3rr' + 9(r')^2 dt = \int_0^{3\pi} f(t)dt \to min \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung,

$$\int_0^{3\pi} g(t)dt = \int_0^{3\pi} (2rr' + 2r)dt = 12\pi + 12 \tag{2}$$

minimiert.

a) (2 Punkte) Setzen Sie in einem ersten Schritt $h(t, \lambda) = f(t) - \lambda g(t)$ in die Euler-Lagrange Gleichung ein und vereinfachen Sie den Ausdruck.

Mit Hilfe der Formel für die Euler-Lagrange Gleichung,

$$\frac{\partial h(t,\lambda)}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h(t,\lambda)}{\partial r'}\right) \tag{3}$$

erhalten wir mit,

$$h(t,\lambda) = -r^2 - 18r + 3rr' + 9(r')^2 - \lambda(2rr' + 2r) \tag{4}$$

und durch Berechung der beiden Seiten, und kürzen einiger Terme,

$$\frac{\partial h(t,\lambda)}{\partial r} = -2r - 18 + 3r' - 2\lambda r' - 2\lambda \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h(t,\lambda)}{\partial r'}\right) = 3r' + 18r'' - 2\lambda r' \tag{6}$$

die zu lösende Differentialgleichung.

$$-2r - 18 - 2\lambda = 18r'' \tag{7}$$

b) (4 Punkte) Lösen Sie die in Aufgabenteil a erhaltene Differentialgleichung und bestimmen Sie die Funktion $r(t)$ unter den Randbedingungen $r(0) = 2$ und $r(3\pi) = 2$.

<u>Hinweise:</u>
Verwenden Sie zum Finden der homogenen Lösung den Ansatz $r_0(t) = e^{\alpha t}$
Beachten Sie, dass $\tilde{c}\sin(t) = c\left(e^{it} - e^{-it}\right)$ und dass $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$18r'' + 2r = 0 \tag{8}$$

kann mit dem Ansatz $r_0(t) = e^{\alpha t}$ gefunden werden. Nach Einsetzen des Ansatzes und kurzem Umformen,

$$\begin{aligned} 18\alpha^2 e^{\alpha t} + 2e^{\alpha t} &= 0 && (9)\\ 18\alpha^2 + 2 &= 0 && (10) \end{aligned}$$

erhält man $\alpha = \pm\frac{1}{3}i$.
Die homogene Lösung hat also die Form,

$$r_{hom}(t) = C_1 e^{\frac{1}{3}it} + C_2 e^{-\frac{1}{3}it} \tag{11}$$

Da der inhomogene Anteil konstant in t ist, ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$r_{par}(t) = -\lambda - 9 \tag{12}$$

und eine vollständige Lösung zu

$$r(t) = r_{hom} + r_{par} = C_1 e^{\frac{1}{3}it} + C_2 e^{-\frac{1}{3}it} - \lambda - 9 \tag{13}$$

Nun müssen nur noch die Konstanten bestimmt werden.
Aus den Randbedingungen und dem Hinweis folgert,

$$\begin{aligned} r(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_2 - \lambda - 9 = 2 && (14)\\ r(3\pi) = 2 \quad &\Rightarrow \quad -C_1 - C_2 - \lambda - 9 = 2 && (15)\\ &\Rightarrow \quad C_1 = -C_2 && (16)\\ &\Rightarrow \quad \lambda = -11 && (17) \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Lösung zu,

$$r(t) = \tilde{C}\sin(\frac{1}{3}t) + 2. \tag{18}$$

Betrachten wir noch einmal die Nebenbedingung und berechnen das Integral,

$$\int_0^{3\pi} r(t)dt = \int_0^{3\pi} 2r(t)r'(t) + 2r(t)dt \tag{19}$$

$$-48\pi + 6 = \int_0^{3\pi} 2(\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}t) + 2)\tilde{C}\cos(\frac{1}{3}t)\frac{1}{3} + 2(\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}t) + 2)dt \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

Zerlegung in 4 Teile,

$$2\tilde{C}^2\frac{1}{3}\int_0^{3\pi}\cos(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{1}{3}t)dt = 2\tilde{C}^2\Big(\sin(\frac{1}{3}t)\Big)^2|_0^{3\pi} = 0 \tag{22}$$

$$4\frac{1}{3}\tilde{C}\int_0^{3\pi}\cos(\frac{1}{3}t)dt = 12\frac{1}{3}\tilde{C}\sin(\frac{1}{3}t)|_0^{3\pi} = 0 \tag{23}$$

$$2\tilde{C}\int_0^{3\pi}\sin(\frac{1}{3}t)dt = 6\tilde{C}\cos(\frac{1}{3}t)|_0^{3\pi} = 12\tilde{C} \tag{24}$$

$$4\int_0^{3\pi} dt = 12\pi \tag{25}$$

und wir erhalten eine Gleichung zur Bestimmung der letzten Konstanten.

$$12\pi + 12\tilde{C} = 12\pi + 12 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = 1 \tag{27}$$

somit erhalten wir die finale Lösung zu:

$$r(t) = \sin(\frac{1}{3}t) + 2 \tag{28}$$

- **Aufgabe 2.**

a) (3 Punkte) Zeigen Sie dass die Fouriertransformierten der Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x \in [0, 3\pi] \\ 0, & \text{für } sonst \end{cases} \qquad g(x) = e^{-\frac{|x|}{3\pi}}$$

existieren, indem Sie zeigen, dass das Integral von $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ (bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$) endlich ist. Existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g(x)$? Zeigen bzw. begründen Sie ihre Aussagen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{|x|}{3\pi}} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x|}{3\pi}} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{3\pi}} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{3\pi}} dx = 6\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{0}^{3\pi} 2dx = 6\pi$$

Somit sind beide Integrale wohldefiniert und es existieren jeweils die Fouriertransformierten. Es existiert auch die Fouriertransformierte von der Funktion $f * g$, da $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} < \infty$.

b) (3 Punkte) Sei eine Funktion gegeben durch: $f(x) = \pi \cdot \max(1 - |x|, 0)$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} \pi \cdot (1 - |x|), & \text{für } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{für } sonst. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$.

Für $x \in (-1, 1)$ ist $1 - |x|$ positiv, ansonsten Null oder negativ. Da wir das Maximum suchen ist der erste Punkt schon gezeigt.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \pi \int_{-1}^{1} (1-|x|) \cdot e^{-ikx} dx = \pi \int_{-1}^{0} (1+x) \cdot e^{-ikx} dx + \int_{0}^{1} (1-x) \cdot e^{-ikx} dx \\
&= \pi \int_{0}^{1} (1-x)(e^{ikx} + e^{-ikx}) dx = \pi \frac{(1-x)(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik} \Big|_{0}^{1} + \pi \int_{0}^{1} \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{ik} dx \\
&= \pi \frac{(e^{ikx} - e^{-ikx})}{(ik)^2} \Big|_{0}^{1} = -\pi \frac{2}{k^2} (\cos(k) - 1)
\end{aligned}
$$

• **Aufgabe 3.** (6 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die Lösung des Anfangswertproblems für $u = u(x,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -5\frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Hinweis: Es gilt zu beachten: $u(\sigma(t,x),t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u(k,t)} e^{ik\sigma(t,x)} dk$.

Das transformierte Problem für $\hat{u} = \hat{u}(k,t)$ lautet:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -5(ik)\hat{u} \quad \text{(siehe 4.27)}.$$

Daraus folgt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\hat{u}(k,t) = c(k)e^{-5ikt}.$$

Bestimmung des unbestimmten Terms $c(k)$:

$$\begin{aligned} c(k) = \hat{u}(k,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ikx}dx \\ &= \frac{2}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Als letzter Schritt muss $\hat{u}(k,t)$ zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2} e^{-5ikt}e^{ikx}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2} e^{ik(-5t+x)}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+k^2} e^{ik\sigma(t,x)}dk \\ &= e^{-|\sigma(t,x)|} \\ &= e^{-|-5t+x|}. \end{aligned}$$