Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2017

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Mo, 24.04.2017) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (1,5 Punkte) Folgendes Vektorfeld beschreibt eine Kreiszylinderströmung:

$$\mathbf{a}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \\ -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{a}(r,\varphi,z)$ in kartesischen Koordinaten folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{b}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \quad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$$1 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2} = 1 + \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{r^2} = 1 + \frac{\frac{y^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2}}{r^2} = 1 + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$-\frac{\sin 2\varphi}{r^2} = -\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

b) (1,5 Punkte) Untersuchen Sie das Vektorfeld $\mathbf{b}$(x,y,z) auf Quellenfreiheit.

$$\nabla\cdot\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} + \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2xy2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+y^2) - 4xy^2 + 4x^3 - 2x(x^2+y^2) + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{-4x^3 - 4xy^2 + 4xy^2 + 4x^3}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

Das Vektorfeld **b**(x,y,z) ist somit quellenfrei!

c) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z)$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \sin z \\ \sin x \cos y \sin z \\ \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist, d.h., ein Potential $\Phi(x, y, z)$ existiert mit $\mathbf{f} = \nabla\,\Phi$. Berechnen Sie $\Phi(x, y, z)$, wobei das Potenzialfeld die Bedingung $\Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2$ erfüllen muss.

Definitionsbereich von **f** ist $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \cos z - \sin x \cos y \cos z \\ -\cos x \sin y \cos z + \cos x \sin y \cos z \\ \cos x \cos y \sin z - \cos x \cos y \sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist das Feld wirbelfrei im $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow \exists$ ein Potential.
Berechnung des Potentials:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z \quad \Rightarrow \Phi(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + A(y, z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z = \sin x \cos y \sin z + \frac{\partial A}{\partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad A(y, z) = B(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sin x \sin y \cos z = \sin x \sin y \cos z + B'(z) \quad \Rightarrow B'(z) = 0, \quad B(z) = c$$

$$\Phi(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + c$$

Mit obiger Bedingung ergibt sich

$$\Phi(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + 1$$

• **Aufgabe 2.** Ein einschaliges Hyperboloid ist durch

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$$

gegeben. Wählen Sie $a = b = c = 2$ und verwenden Sie die Parametrisierung:

$$r : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot \cosh(u) \cdot \cos(v) \\ b \cdot \cosh(u) \cdot \sin(v) \\ c \cdot \sinh(u) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) (1,5 Punkte) Für welche $(u,v) \in B$ ist F eine reguläre Fläche? Begründen Sie!

$r(u,v)$ ist als Produkt stetig differenzierbarer Funktionen selbst wiederum stetig differenzierbar. Die Vektoren

$$\frac{\partial r}{\partial u} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \sinh(u) \cdot \cos(v) \\ \sinh(u) \cdot \sin(v) \\ \cosh(u) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\cosh(u) \cdot \sin(v) \\ \cosh(u) \cdot \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind offensichtlich für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, da $\cosh(u) \neq 0$ für alle u in $\mathbb{R}$. Eine injektive Parametrisierung wäre etwa auf $B = \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ gegeben.

b) (1,5 Punkte) Berechnen Sie den Maßtensor von F!

Mit den oben berechneten Vektoren erhält man sofort:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \\ \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (\sinh^2(u) + \cosh^2(u)) & 0 \\ 0 & 4 \cdot \cosh^2(u) \end{pmatrix}$$

c) (3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Maßtensors die Fläche von

$$F = \{r(u,v) \quad | \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,\pi]\}$$

Hinweis: Substituieren sie gegebenenfalls geeignet. Sie dürfen außerdem das folgende Integral verwenden:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot x + \operatorname{arsinh}(x)$$

Es gilt:

$$\int_F \mathrm{d}S = \int_{(u,v)\in[0,1]\times[0,\pi]} \sqrt{\det(M(u,v))}\,\mathrm{d}(u,v) = \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{\pi} 4 \cdot \sqrt{1+2\cdot\sinh^2(u)} \cdot \cosh(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

wobei die Identität $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ verwendet wurde.

Mit der Substitution $z = \sqrt{2} \cdot \sinh(u)$ erhält man:

$$\int_F \mathrm{d}S = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \int_{z=0}^{\sqrt{2}\cdot\sinh(1)} \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z \cdot \int_{v=0}^{\pi} 1 \cdot \mathrm{d}v$$

$$= \frac{4\cdot\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1+2\cdot\sinh^2(1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sinh(1) + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2}\cdot\sinh(1))\right)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\pi \cdot \left(\sqrt{1+2\cdot\sinh^2(1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \sinh(1) + \operatorname{arsinh}(\sqrt{2}\cdot\sinh(1))\right)$$

$$\approx 20.01$$

Die Berechnung des numerischen Wertes ist nicht erforderlich, um volle Punktezahl zu erreichen.

- **Aufgabe 3.**

a) (5 Punkte) Berechnen Sie explizit durch Integration das Flussintegral des Vektorfelds

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

durch den Rand von $V : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z,\ 0 \leq y \leq 6,\ x^2 + z^2 \leq 2^2\}$.
Hinweis:
Überlegen Sie zuerst, welche 2 Flächen des Rands von V keinen Beitrag zum Flussintegral liefern.

Das Volumen V ist die obere Hälfte eines liegenden Zylinders mit Radius $R = 2$ und Länge $L = 6$. Der Rand von V besteht aus vier Flächen: 1) der Zylindermantelfläche, 2) der Bodenfläche, 3) der Frontseite ($y = L$) und 4) der Rückseite ($y = 0$).

$$\int_{\partial V} v \cdot \mathrm{d}S =$$
$$= \int_{\text{Zylindermantel}} v \cdot \mathrm{d}S_{\text{Zylindermantel}} + \int_{\text{Boden}} v \cdot \mathrm{d}S_{\text{Boden}} + \int_{\text{Front}} v \cdot \mathrm{d}S_{\text{Front}} + \int_{\text{Rück}} v \cdot \mathrm{d}S_{\text{Rück}}$$

Die Flächenelemente $\mathrm{d}S$ ergeben sich durch Parametrisierung in Zylinder- (S_1), kartesischen- (S_2), bzw. Polarkoordinaten (S_3 und S_4):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_1 &= \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ 0 \\ R\sin\phi \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(y,\phi) \\
\mathrm{d}S_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(x,y) \\
\mathrm{d}S_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(r,\phi) \\
\mathrm{d}S_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(r,\phi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{S_1} v \,\mathrm{d}S_1 &= \int_{S_1} \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ -y \\ R\sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ 0 \\ R\sin\phi \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(y,\phi) = \int_0^\pi \int_0^L R^2 \underbrace{(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))}_{=1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\phi \\
&= R^2 \pi L \\
\int_{S_2} v \,\mathrm{d}S_2 &= \int_{S_2} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(x,y) = 0 \\
\int_{S_3} v \,\mathrm{d}S_3 &= \int_{S_3} \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ -L \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(r,\phi) = \int_0^\pi \int_0^R -Lr \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi = -\frac{1}{2} R^2 \pi L \\
\int_{S_4} v \,\mathrm{d}S_4 &= \int_{S_4} \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ -0 \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(r,\phi) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\partial V} v \cdot \mathrm{d}S = \frac{1}{2} R^2 \pi L
$$

b) (1 Punkt) Verifizieren Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass das Volumen des halben Zylinders 12π beträgt.

Da gilt: $\operatorname{div} v = 1$

$$
\int_{\partial V} v \,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} v \,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}V = \frac{1}{2} R^2 \pi L = 12\pi \ .
$$