Aufgabe 1 (Version A)
Die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{f}(x, y, z)$ verschwindet im $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin y \sin z \\ x \cos y \sin z \\ x \sin y \cos z \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Argument dafür an, dass eine Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ existiert.
Berechnen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$, das die Bedingung $\Phi(1, \pi/2, \pi/2) = 2$ erfüllt.

Aufgabe: Geben Sie den numerischen Wert $\Phi(0, \pi/2, \pi/2)$ als Lösung an.

Aufgabe 1 (Version B)
Die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{f}(x, y, z)$ verschwindet im $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \sin x \cos z \\ -\cos x \cos z \\ y \cos x \sin z \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Argument dafür an, dass eine Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ existiert.
Berechnen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$, das die Bedingung $\Phi(0, 1, 0) = 3$ erfüllt.

Aufgabe: Geben Sie den numerischen Wert $\Phi(\pi/2, 0, \pi/2)$ als Lösung an.

Aufgabe 1 (Version C)
Die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{f}(x, y, z)$ verschwindet im $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sin x \sin y \\ -z \cos x \cos y \\ -\cos x \sin y \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein Argument dafür an, dass eine Potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ existiert.
Berechnen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$, das die Bedingung $\Phi(0, \pi/2, 1) = 3$ erfüllt.

Aufgabe: Geben Sie den numerischen Wert $\Phi(\pi/2, \pi/2, 3)$ als Lösung an.

(1) (A)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \sin z \\ x \cos y \sin z \\ x \sin y \cos z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin y \sin z \\ x \cos y \sin z \\ x \sin y \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos y \cos z - x \cos y \cos z \\ -(\sin y \cos z - \sin y \cos z) \\ \cos y \sin z - \cos y \sin z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\operatorname{rot} f = 0$ in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ einf. zusamm.h. $\exists\, \Phi(x,y,z)$ mit $\nabla \Phi = f$.

(2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y \sin z \Rightarrow \Phi = x \sin y \sin z + \underbrace{\hat{f}(y,z)}_{=g(z)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x \cos y \sin z + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = x \cos y \sin z \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \hat{f}(y,z) = g(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = x \sin y \cos z + g'(z) = x \sin y \cos z \Rightarrow g'(z) = 0$$

$$g(z) = c$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = x \sin y \sin z + \overset{=1}{c}$$

$$\Phi(1, \pi/2, \pi/2) = 2 \Leftrightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\Phi(0, \pi/2, \pi/2) = \underline{\underline{1}}$$

B

1

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin x\cos z \\ -\cos x\cos z \\ y\cos x\sin z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\sin x\cos z \\ -\cos x\cos z \\ y\cos x\sin z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x\sin z - (\cos x\sin z) = 0 \\ -(-y\sin x\sin z + y\sin x\sin z) = 0 \\ \sin x\cos z - \sin x\cos z = 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rot} f = 0$ im $\mathbb{R}^3$ (einf. zusamm.) $\Rightarrow \exists \Phi$

2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y\sin x\cos z = -y\cos x\cos z + \underbrace{\hat{f}(y,z)}_{g(z)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\cos x\cos z + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = -\cos x\cos z \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(y,z) = g(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = y\cancel{\cos x\sin z} + g'(z) = y\cancel{\cos x\sin z} \Rightarrow$$

$$g(z) = \text{const}$$

$$\Phi(x,y,z) = -y\cos x\cos z + c = 4$$

$$\Phi(0,1,0) = 3 \Rightarrow -1 + c = 3 \Rightarrow \underline{\underline{c = 4}}$$

$$\Phi(\pi/2, 0, \pi/2) = \underline{\underline{4}}$$

(c)

(1)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\sin x \sin y \\ -z\cos x\cos y \\ -\cos x \sin y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z\sin x\sin y \\ -z\cos x\cos y \\ -\cos x\sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x\cos y + \cos x\cos y = \emptyset \\ -(\sin x\sin y - \sin x\sin y = \emptyset \\ z\sin x\cos y - z\sin x\cos y = \emptyset \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rot} f = 0$ im $\mathbb{R}^3$ (einf. zus.) $\Rightarrow \exists \Phi$

(2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = z\sin x\sin y \Rightarrow \Phi = -z\cos x\sin y + \underbrace{\hat{f}(y,z)}_{=g(z)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -z\cos x\cos y + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = -z\cos x\cos y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \hat{f}(y,z) = g(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\cos x\sin y + g'(z) = -\cos x\sin y \Rightarrow g'(z) = \emptyset$$

$$\Rightarrow g(z) = c$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = -z\cos x\sin y + c = 4$$

$$\Phi(0, \pi/2, 1) = 3 \Rightarrow -1\cdot 1\cdot 1 + c = 3 \Rightarrow \underline{\underline{c = 4}}$$

$$\Phi(\pi/2, \pi/2, 3) = \emptyset + 4 = \underline{\underline{4}}$$

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch den Rand von

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2, y \geq 0\}$$

auf folgendem Wege.

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch den Rand von V, ∂V.

b) Bestätigen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze Überlegen Sie, welche Teile des Integrals zu 0 werden. Weiters benutzen Sie wenn nötig

$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^3(x)dx = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx = 0.$$

Rechnen und argumentieren Sie auf dem Papier und tragen Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau in die Antwortfelder ein!

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x + yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch den Rand von

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3^2, y \geq 0\}$$

auf folgendem Wege.

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch den Rand von V, ∂V.

b)b) Bestätigen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze! Überlegen Sie, welche Teile des Integrals zu 0 werden. Weiters benutzen Sie wenn nötig

$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^3(x)dx = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx = 0.$$

Rechnen und argumentieren Sie auf dem Papier und tragen Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau in die Antwortfelder ein!

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5x + yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch den Rand von

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2, y \geq 0\}$$

auf folgendem Wege.

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch den Rand von V, ∂V.

b) Bestätigen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze! Überlegen Sie, welche Teile des Integrals zu 0 werden. Weiters benutzen Sie wenn nötig

$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^3(x)dx = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx = 0.$$

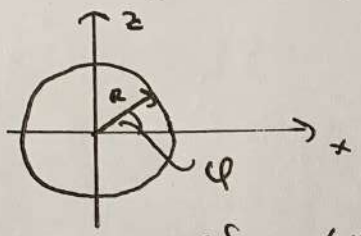
Rechnen und argumentieren Sie auf dem Papier und tragen Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau in die Antwortfelder ein!

$$\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha x + yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2, y \geq 0 \}$$

α und R unterschiedlich je nach Gruppe (siehe Unter)

a) $$\int_{\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Boden}} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Mantelf.}} \vec{a}\, d\vec{S}$$

<u>Boden:</u> Parametrisierung d. Kreisfläche



$$f = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} ; r \in [0,R] ; \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial r} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ 0 \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\text{Boden}} \vec{a}\, d\vec{S} = \int \vec{a} \cdot \vec{n}\, dr\, d\varphi = \int \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} dr\, d\varphi = \underline{0}$$

<u>Kugelfläche:</u>

$$f = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} ; \vartheta \in [0,\pi] ; \varphi \in [0,\pi]$$

$$\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \times \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$d\vec{S} = \vec{n}\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$\int_{\text{Kugelf.}} \vec{a}\, d\vec{S} = \int \begin{pmatrix} \alpha R\sin\vartheta\cos\varphi + R^3\sin\vartheta\cos^2\vartheta\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi \Big[\alpha R^2 \sin^3\vartheta\cos^2\varphi + \underbrace{R^5\sin^3\vartheta\cos^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}_{\to 0,\ \text{da } \int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0} \Big] d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= [\text{Hinweis}] = \alpha R^3 \frac{2}{3} \frac{\pi}{2} = \underline{\alpha R^3 \frac{2}{3}\pi}$$

h) $\operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x + g z^2) + 0 + 0 = \alpha$

$$\int_V \operatorname{div} a \, dV = \alpha \int_V dV = [\text{Volumen einer Halbkugel}] = \underline{\alpha R^3 \tfrac{2}{3}\pi}$$

$$\alpha R^3 \tfrac{2}{3}\pi = \begin{cases} \text{A} \quad \alpha = 2;\ R = 5 \rightarrow \underline{523{,}60} \\ \text{B} \quad \alpha = 3;\ R = 3 \rightarrow \underline{169{,}65} \\ \text{C} \quad \alpha = 5;\ R = 2 \rightarrow \underline{83{,}78} \end{cases}$$

Gruppe A (Stokes)
Gegeben sei eine berandete Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \geq 0\}$$

. Weiters sei ein Vektorfeld

$$a(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz^2 \\ \frac{2}{3}x^3 \\ x^2 z \end{pmatrix}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Fläche F und zeichnen Sie den Rand ∂F ein. Berechnen Sie folgendes Oberflächenintegral,

$$\int_F (\nabla \times a) dS$$

und geben Sie einen spezifischen Zahlenwert auf zwei Stellen gerundet an.
Hinweis:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \pi, \quad \int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^4(x)}{4}$$

Gruppe B (Stokes)
Gegeben sei eine berandete Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0\}$$

. Weiters sei ein Vektorfeld

$$a(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Fläche F und zeichnen Sie den Rand ∂F ein. Berechnen Sie folgendes Oberflächenintegral,

$$\int_F (\nabla \times a) dS$$

und geben Sie einen spezifischen Zahlenwert auf zwei Stellen gerundet an.
Hinweis:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi, \quad \int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^4(x)}{4}$$

Gruppe C (Stokes)
Gegeben sei eine berandete Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z \geq 0\}$$

. Weiters sei ein Vektorfeld

$$a(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x^2 y \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

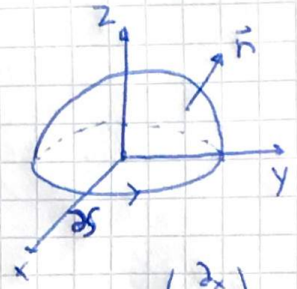
gegeben. Skizzieren Sie die Fläche F und zeichnen Sie den Rand ∂F ein. Berechnen Sie folgendes Oberflächenintegral,

$$\int_F (\nabla \times a) dS$$

und geben Sie einen spezifischen Zahlenwert auf zwei Stellen gerundet an.
Hinweis:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi, \quad \int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^4(x)}{4}$$

(A) $x^2+y^2+z^2=9,\ z\geq 0$ $\qquad \vec{a}=\begin{pmatrix} xz^2 \\ \frac{2}{3}x^3 \\ x^2 z\end{pmatrix}$



$$\iint_F \vec{\nabla}\times\vec{a}\, d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} xz^2\\ \frac{2}{3}x^3\\ x^2 z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2x^2\end{pmatrix}$$

verwende Kugelkoordinaten:

$x=r\cos\varphi\sin\theta$

$y=r\sin\varphi\sin\theta$

$z=r\cos\theta$

$$\vec{n}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta\\ r\sin\varphi\cos\theta\\ -r\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\varphi\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=r^2\cdot\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\ \sin^2\theta\sin\varphi\\ \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}=r^2\sin\theta\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Halbkugel: $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0;2\pi],\ r=3$

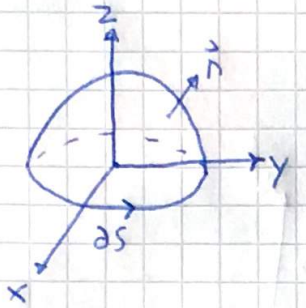
$$\iint_F \vec{\nabla}\times\vec{a}\, d\vec{S}=\iint_F(\vec{\nabla}\times\vec{a})\,\vec{n}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\cdot(3\cos\varphi\sin\theta)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}9\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}162\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\varphi\, d\theta\, d\varphi\underset{\text{Hinweis}}{=}162\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\underset{\text{Hinweis}}{=}$$

$$162\pi\cdot\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{81}{2}\pi\approx\underline{127{,}23}$$

(B)

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z \geq 0 \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$$



$$\iint_F \vec{\nabla} \times \vec{a} \, d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

verwende Kugelkoordinaten:

$$x = r \cos\varphi \sin\theta$$

$$y = r \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = r \cos\theta$$

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = r^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Halbkugel: $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r = 2$

$$\iint_F \vec{\nabla} \times \vec{a} \, dS = \iint_F (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{n} \, dS =$$

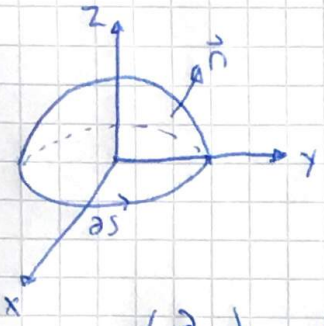
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cdot(2\sin\theta\sin\varphi)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} 4\sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$48 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi \, d\theta \, d\varphi \underset{\text{Hinweis}}{=} 48\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta \underset{\text{Hinweis}}{=}$$

$$48\pi \frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2} = 12\pi \approx \underline{37{,}70}$$

(C)

$$x^2+y^2+z^2=2, \quad z\geq 0 \qquad \vec{a}=\begin{pmatrix}-x^2y\\ y\\ z^2\end{pmatrix}$$



$$\iint_F \vec{\nabla}\times\vec{a}\, d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-x^2y\\ y\\ z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ x^2\end{pmatrix}$$

verwende Kugelkoordinaten: $x=r\cos\varphi\sin\theta$

$y=r\sin\varphi\,\cancel{\cos}\sin\theta$

$z=r\cos\theta$

$$\vec{n}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\theta\\ r\sin\varphi\cos\theta\\ -r\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\varphi\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=r^2\cdot\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\ \sin^2\theta\sin\varphi\\ \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}=r^2\sin\theta\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Halbkugel: $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $r=\sqrt{2}$

$$\iint_F \vec{\nabla}\times\vec{a}\, d\vec{S}=\iint_F(\vec{\nabla}\times\vec{a})\,\vec{n}\, dS=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ (\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}4\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\, d\theta\, d\varphi\underset{\text{Hinweis}}{=}4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\underset{\text{Hinweis}}{=}$$

$$4\pi\cdot\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/2}=\pi\approx\underline{3{,}14}$$