Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 25.06.2021) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Eine Ameise möchte eine 1×1 Meter Sandkiste durchqueren. Sie befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Eingang der Sandkiste bei $(x, y) = (0, 0)$ und zum Zeitpunkt T am Ausgang der Sandkiste bei $(x, y) = (1, 1)$. Die Konsistenz des Sandes in der Sandkiste ist in y-Richung unterschiedlich, in x-Richtung aber homogen. Dadurch ist die Geschwindigkeit der Ameise abhängig von ihrer jeweiligen Position in y-Richtung. Da die Ameise die Sandkiste mehrmals täglich durchqueren muss, möchte sie diejenige Kurve finden, bei der sie die geringste Zeit T benötigt.

Nach mehreren Durchquerungen hat die Ameise die Geschwindigkeitsfunktion $v(y) = \sqrt{3y}$ in Abhängigkeit ihrer Position in der Sandkiste gefunden. Bestimmen Sie ausgehend von

$$T = \int_0^T dt$$

das zu minimierende Funktional

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y')dx,$$

wobei T die zu minimierende Dauer der Ameise in der Sandkiste ist.
Hinweis: Für das Bogenelement ds gilt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Umformen liefert den folgenden Ausdruck.

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{s(T)} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^{s(T)} \frac{ds}{v}$$

Einsetzen von $v(y) = \sqrt{3y}$ und $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$ gibt das zu minimierende Funktional.

$$I[y] = \int_{x(0)}^{x(T)} f(y, y')dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{3y}} dx \tag{1}$$

b) (1.5 Punkte) Finden Sie eine Differentialgleichung für jene Funktion $y(x)$, die das in Unterpunkt a) berechnete Funktional $I[y]$ minimiert. Benutzen Sie dabei die Form der Euler-Lagrange Gleichung für $f = f(y, y')$ und berechnen Sie daraus y'. Begründen Sie, warum Sie jeden Schritt der Herleitung durchführen dürfen.

Mit $f(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{3y}}$ folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

aufgrund der expliziten Unabhängigkeit von $f(y, y')$ von x, dass

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = c.$$

Einsetzen liefert folgende Lösung.

$$y' = \sqrt{\frac{1-3c^2y}{3c^2y}}$$

c) (1.5 Punkte) Finden Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $x(t)$, welche das Wirkungsintegral

$$I[x] := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}k(x')^2 - cx^2\right) dt$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 x^2 dt - 1 = 0$$

minimiert.

Mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial h}{\partial x'}) = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Auswerten für

$$h(t,x,x') = \frac{1}{2}k(x')^2 - cx^2 + \lambda x^2$$

ergibt für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial h}{\partial x'}) = \frac{d}{dt}(kx') = kx''.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2cx + 2\lambda x = x(-2c + 2\lambda).$$

Zusammen ergibt sich damit die folgende Differentialgleichung

$$kx'' = 2x(-c + \lambda).$$

d) (1 Punkt) Lösen Sie, die in Unterpunkt c) erhaltene Gleichung für $c = 0$, $k = 2$. Diese Lösung hängt von drei Konstanten ab. Geben Sie das Gleichungssystem an, das diese Konstanten erfüllen, wobei, die Nebenbedingung und die beiden Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x(1) = 1$ gelten. Vereinfachen Sie das System so weit, dass in der Nebenbedingung nur die Unbekannte λ auftritt. Das Lösen dieser nichtlinearen Gleichung ist nicht mehr notwendig.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $x(t) = e^{at}$. Es gilt $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Mit den Werten ergibt sich die folgende Gleichung.

$$x'' = \lambda x$$

Die Verwendung des Ansatzes führt auf $a = \sqrt{\lambda}$ und

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}.$$

Das Gleichungssystem für die Konstanten c_1, c_2, und λ lautet:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ x(1) &= c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 1, \\ \int_0^1 (x(t))^2 dt - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei ersten Gleichungen ergibt sich

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sinh(\sqrt{\lambda})}.$$

Schlussendlich ergibt sich damit

$$x(t) = \frac{1}{\sinh(\sqrt{\lambda})} \sinh(\sqrt{\lambda} t)$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sinh(\sqrt{\lambda})} \sinh(\sqrt{\lambda} t) \right)^2 dt - 1 = 0.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (3,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^2 e^{-2|x|}$$

Hinweis: *Integrieren Sie zuerst partiell:* $\int x^2 e^{\alpha x} \mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2|x|} e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

Zunächst löst man den Betrag auf.

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{(2-ik)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-(2+ik)x} \mathrm{d}x$$

Nun muss zweimal partiell integriert werden. Für das erste Integral erhalten wir:

$$= \frac{x^2}{2-ik} e^{(2-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{2-ik} e^{(2-ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2-ik} - \frac{2x}{(2-ik)^2} \right) e^{(2-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{(2-ik)^2} e^{(2-ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2-ik} - \frac{2x}{(2-ik)^2} + \frac{2}{(2-ik)^3} \right) e^{(2-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{2}{(2-ik)^3}.$$

Für das zweite Integral erhalten wir:

$$= -\frac{x^2}{2+ik} e^{-(2+ik)x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{2+ik} e^{-(2+ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2+ik} + \frac{2x}{(2+ik)^2} \right) e^{-(2+ik)x}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{2}{(2+ik)^2} e^{-(2+ik)x} \mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2+ik} + \frac{2x}{(2+ik)^2} + \frac{2}{(2+ik)^3} \right) e^{-(2+ik)x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{(2+ik)^3}.$$

Als Endergebnis ergibt sich:

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{(2-ik)^3} + \frac{2}{(2+ik)^3}.$$

b) (2,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ unter Verwendung der Linearität der Fouriertransformation, sowie der Ableitungsregeln der Fouriertransformierten.

$$f(x) = 8x^3 e^{-x^2}$$

Hinweis:
(1) *Zeigen Sie zunächst:* $f(x) = -6\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}$
(2) $\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zuerst berechnen wir die ersten drei Ableitungen der Exponentialfunktion:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(e^{-x^2}) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 8x^3e^{-x^2} = -6\frac{d}{dx}e^{-x^2} - \frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}.$$

Unter Ausnutzung der Linearität folgt nun:

$$\hat{f}(k) = -6\widehat{\frac{d}{dx}e^{-x^2}} - \widehat{\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}}.$$

Nach Verwendung der Ableitungsregeln erhält man:

$$= -6ik\widehat{e^{-x^2}} - (ik)^3\widehat{e^{-x^2}}.$$

Mithilfe des Hinweises erhält man das Endergebnis:

$$\hat{f}(k) = ik(k^2 - 6) \cdot \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei der Differentialoperator L mit

$$Lu(x) = u''(x) + 6u'(x) + 5u(x).$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Fundamentallösung zu L. Die bestimmte Lösung soll dabei die Standardbedingungen, wie in der Vorlesung, erfüllen und beschränkt sein mit $\lim_{x\to+\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$.

Die Fundamentallösung soll $LU(x) = \delta(x)$ erfüllen, daher ist $LU(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

$$LU(x) = U''(x) + 6U'(x) + 5U(x) = 0,\ \forall x \neq 0$$

Wir machen den Ansatz $U(x) = ae^{\lambda x}$

$$LU(x) = (\lambda^2 + 6\lambda + 5)ae^{\lambda x} = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2$$

$$U(x) = \begin{cases} a^+e^{-x} + b^+e^{-5x} & x > 0 \\ a^-e^{-x} + b^-e^{-5x} & x < 0 \end{cases}$$

U soll nun einige Bedingungen erfüllen.

- $U(x)$ soll beschränkt sein, damit $\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)f(\xi)d\xi$ existiert $\to a^- = b^- = 0$.
- U(x) soll stetig sein, damit die Lösung $u(x)$ keinen Knick hat (stetig differenzierbar ist). $U^-(0) = U^+(0) = 0 \to a^+ = -b^+$. Damit erhalten wir

$$U(x) = \begin{cases} Ae^{-x} - Ae^{-5x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $U''(x)$ verhält sich wie $\delta(x)$, also muss $U'(0+) - U'(0-) = 1$ gelten, woraus $-A + 5A = 4A = 1$ folgt. Alternativ können wir auch die Normierung der Deltafunktion nutzen.
  $LU(x) = \delta(x) \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} LU(x)dx = 1$

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U''(x) + 6U'(x) + 5U(x)dx\right] \\ =&\lim_{\epsilon\to 0}\left[U'_+(\epsilon) - U'_-(-\epsilon) + 6\big(U_+(\epsilon) - U_-(-\epsilon)\big) + 5\int_{-\epsilon}^{\epsilon} U(x)dx\right] \\ =&\lim_{\epsilon\to 0}\left[-Ae^{-\epsilon} + 5Ae^{-5\epsilon}\right] = 4A = 1 \end{aligned}$$

Dabei haben wir für den letzten Punkt die Stetigkeit von $U(x)$ und die Tatsache benutzt, dass ein Integral einer stetigen Funktion, für einen verschwindenden Integrationsbereich, gegen Null strebt. Es folgt

$$A = \frac{1}{4},$$

und damit

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-5x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b) (2,5 Punkte) Lösen Sie nun $Lu(x) = 4\cosh(x/2)$.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\xi)\, 4\cosh(\xi/2) d\xi$$

Wir haben die Bereiche von $U(x)$ nach dem Vorzeichen des Arguments aufgeteilt. Das Argument ist nun $(x-\xi)$ weshalb sich die Bereiche zu

$$\begin{array}{ll} x-\xi < 0 \text{ für } \xi > x & U_-(x-\xi) \\ x-\xi > 0 \text{ für } \xi < x & U_+(x-\xi) \end{array}$$

ergeben. Wir teilen also das Integral an der Stelle x auf.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} U_+(x-\xi)\, 4\cosh(\xi/2) d\xi + \int_{x}^{\infty} 0\, d\xi$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-x+\xi}\left(e^{\frac{\xi}{2}} + e^{-\frac{\xi}{2}}\right) d\xi - -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-5x+5\xi}\left(e^{\frac{\xi}{2}} + e^{-\frac{\xi}{2}}\right) d\xi \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\xi} + 2e^{\frac{\xi}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{x} - \frac{e^{-5x}}{2}\left(\frac{2}{11}e^{\frac{11}{2}\xi} + \frac{2}{9}e^{\frac{9}{2}\xi}\right)\Bigg|_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{8}{33}e^{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}e^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

c) (0,5 Punkte) Hat $Lu(x) = \cosh(x)$ eine Lösung auf $\mathbb{R}$? Argumentieren Sie geschickt anstatt zu rechnen.

Nein, da das Integral

$$\int_{-\infty}^{x} 1 d\xi$$

im Integrationsbereich divergiert .