Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

WS 2006/2007

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

Haupttest am 15. 12. 2006

1. Beispiel

Gegeben seien die Menge U und der Unterraum W durch die folgende Angabe:

$$\begin{aligned} U &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = k,\ k \in \mathbb{R}\} \\ W &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 - 3x_1 = 0,\ 4x_3 - 3x_4 = 0\} \end{aligned}$$

1. Für welche Werte von k stellt die Menge U einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ dar? Beweisen Sie Ihre Behauptung. (1P)
2. Für die in Punkt 1 ermittelten Werte des Parameters k bestimmen Sie nun jeweils eine Basis und die Dimension von U, W und $U + W$. (4P)
3. Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap W$. (0.5P)
4. Ist die Summe $U + W$ direkt? (0.5P)

Lösung:

1. $k = 0$ ist notwendig für $\mathbf{0} \in U$.

   Beweis:

   - Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ und damit

     $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0\,, \\ 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 &= 0 \end{aligned}$$

     folgt mit

     $$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3) - 2(x_4 + y_4) \\ &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 = 0\,, \end{aligned}$$

     dass auch $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ ist.
   - Mit $\mathbf{x} \in U$ und $s \in \mathbb{R}$ ist

     $$s\,\mathbf{x} = 3sx_1 + 2sx_2 - 2sx_3 - 2sx_4 = s(3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4) = 0$$

     und somit $s\,\mathbf{x} \in U$.

   Das Unterraumkriterium ist erfüllt, also ist U ein Unterraum.

2. Basis und Dimension von U:
   Mit $x_2 = 3r,\ x_3 = 3s,\ x_4 = 3t,\quad r, s, t \in \mathbb{R},$ ist

$$x_1 = \frac{1}{3}(-2x_2 + 2x_3 + 2x_4) = -2r + 2s + 2t\,,$$

   und $\mathbf{x} \in U$ hat daher die Darstellung

$$\mathbf{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \dim U = 3.$$

   Basis und Dimension von W:
   Mit $x_1 = s \ \Rightarrow x_2 = 3s$ und aus $x_4 = 4t \ \Rightarrow x_3 = 3t,\quad s, t \in \mathbb{R}.$
   $\mathbf{x} \in W$ hat dann die Darstellung

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \dim W = 2.$$

   Basis und Dimension von U+W:
   Zeilenumformung der Matrix bestehend aus dem ersten Basisvektor von W und der drei Basisvektoren von U

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad z_2 - 3z_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   zeigt die lineare Unabhängigkeit der 4 Vektoren und damit $\dim(U + W) = 4$. Eine Basis von $U + W$ ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Aus dem Dimensionssatz für Unterräume folgt

$$\begin{array}{rcl} \dim(U + W) & = & \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ 4 & = & \ \ 3 \quad + \quad 2 \quad - \dim(U \cap W) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \dim(U \cap W) = 1$$

4. Wegen $\dim(U \cap W) = 1 \ \Rightarrow \ U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$. Also ist $U + W$ *nicht* direkt !

2. Beispiel

Es sei $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, mit

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} b_1 & = & -3\,x^3 & & & + & 2\,x & + & 1 \\ b_2 & = & -2\,x^3 & & & + & x & & \\ b_3 & = & x^3 & + & x^2 & & & & \\ b_4 & = & & + & c\,x^2 & + & b\,x & + & a \end{array}$$

und $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie folgende Aussage:

   $$b_1, \ldots, b_4 \text{ sind } \textbf{linear abhängig} \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b + c = 0\,.$$

   Ist in diesem Fall das Polynom $p(x) = x^3 \in \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4)$? (Begründen Sie!) (3P)

2. Es sei nun $(a, b, c)^T = (1, 1, 0)^T$. Begründen Sie, dass B eine Basis von P_3 ist. Dabei sei P_3 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 (1P)

3. Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^3 \in P_3$ als Linearkombination bezüglich der Basis B aus Punkt 2. dar. (2P)

Lösung:

1. Für die Vektoren $b_1, \ldots, b_4$ gilt:
   $b_1, \ldots, b_4$ l.a. $\Leftrightarrow \exists\,(r_1, \ldots, r_4)^T \in \mathbb{R}^4,\ (r_1, \ldots, r_4)^T \neq 0\ :\ r_1 b_1 + \ldots + r_4 b_4 = 0$.

   Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{array}{cc} x^3 & \rightarrow \\ x^2 & \rightarrow \\ x & \rightarrow \\ 1 & \rightarrow \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Zudem gilt:

   $$p = x^3 \in V := \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_4) \ \Leftrightarrow\ \exists\,(s_1, \ldots, s_4)^T \in \mathbb{R}\ :\ s_1 b_1 + \ldots + s_4 b_4 = p.$$

   Dies führt wieder mittels Koeffizientenvergleich auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{array}{rlcll} \Rightarrow & b_1, \ldots, b_4 \text{ l.a.} & \Leftrightarrow & \text{Rang}\,A < 4 \quad (\text{Satz 2.11}) & \text{und} \\ & p \in V & \Leftrightarrow & \text{Rang}\,A = \text{Rang}\,(A \,|\, (1,0,0,0)^T) \quad (\text{Satz 2.8})\,. & \end{array}$$

Bestimmen von Rang A und Rang $(A|\mathbf{e}_1)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 2 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right) \quad \text{vertauschen der Zeilen } z_1 \text{ bis } z_4,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad z_2 - 2z_1,\ z_4 + 3z_1,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b-2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3a & 1 \end{array}\right) \quad z_4 + 2z_2,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b-2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a+2b & 1 \end{array}\right) \quad z_4 - z_3,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b-2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+2b-c & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad b_1, \ldots, b_4$ l.a. $\quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Rang} A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b + c = 0.$

In diesem Fall ist aber $\operatorname{Rang} A \neq \operatorname{Rang}(A|\mathbf{e}_1) = 4$ und daher $p \notin V$.

2. $(a,b,c)^T = (1,1,0)^T \implies a - 2b + c = -1 \neq 0 \overset{\text{Aufg. 1.}}{\implies} b_1, \ldots, b_4$ sind linear unabhängig. Da $\dim P_3 = 4$ ist, folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz oder Satz 1.10 (Maximaleigenschaft einer Basis):
$$b_1, \ldots, b_4 \quad \text{ist eine Basis von } P_3\,.$$

3. Die erweiterte Matrix aus Aufg. 1. lautet:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert:
$$s_4 = 1,\ s_3 = 0,\ s_2 = s_4 = 1,\ s_1 = -s_4 = -1$$
$$\Rightarrow \quad p(x) = x^3 = -b_1 + b_2 + b_4\,.$$

3. Beispiel

Gegeben sind die Basis

$$C = \{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$$

und die kanonische Basis

$$E_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

des $\mathbb{R}^3$.

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_1 - x_2, x_1 + x_2, \sqrt{2} x_3 \right)^T .$$

1. Wie lautet die Matrix $A = [\varphi]_{E_3,E_3}$ der Abbildung φ bezüglich der kanonischen Basis E_3? (1P)
2. Zeigen Sie, dass die Matrix A invertierbar ist. Interpretieren Sie die Abbildung φ geometrisch. (1P)
3. Ermitteln Sie die Transformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$ des Basiswechsels von C auf E_3 und $[\mathrm{id}]_{C,E_3}$ des Basiswechsels von E_3 auf C. (1P)
4. Bestimmen Sie die Matrix $A' = [\varphi]_{C,C}$ der Abbildung φ bezüglich der Basis C. Sind die Matrizen A und A' ähnlich? Begründen Sie. (2P)
5. Bestimmen Sie für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ die Koordinaten $[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3}$ und $[\varphi(\mathbf{v})]_C$ der Bilder von $\mathbf{v}$ unter φ bezüglich der Basen E_3 und C (1P)

Lösung:

1. Für die Abbildungsmatrix A erhält man durch Einsetzen der Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ in $\varphi(\mathbf{x})$:

$$A = [\varphi]_{E_3,E_3} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2), \varphi(\mathbf{e}_3)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. Die Determinante $\det A = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A$ ist regulär und damit invertierbar.
Die Abbildung φ entspricht einer Drehung um 45° um die x_3-Achse.

3. Die Transformationsmatrix $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$ ist

$$[\mathrm{id}]_{E_3,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Invertieren der Matrix $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$ durch Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{vertauschen der Zeilen } z_1 \text{ und } z_3,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad z_2 - z_1 \text{ und } z_3 - z_1,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad z_3 - z_2,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

liefert

$$[\mathrm{id}]_{C,E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Für die Matrix $A' = [\varphi]_{C,C}$ gilt:

$$\begin{aligned} [\varphi]_{C,C} &= [\mathrm{id}]_{C,E_3} \cdot [\varphi]_{E_3,E_3} \cdot [\mathrm{id}]_{E_3,C} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2-\sqrt{2} & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A und A' sind ähnlich, weil ähnliche Matrizen genau jene Matrizen sind, die dieselbe lineare Abbildung $\varphi \in L(V,V)$ bezüglich verschiedener Basen beschreiben.

5. Der Vektor $\mathbf{v}$ wird bezüglich der kanonischen Basis durch $[\mathbf{v}]_{E_3} = (1,1,0)^T$ dargestellt. Damit ergeben sich die Koordinaten:

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = [\varphi]_{E_3,E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{C} = [\mathrm{id}]_{C,E_3} \cdot [\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$