Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

WS 2006/2007

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

Nachtest am 02. 02. 2007

1. Beispiel

Gegeben sind folgende vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (4,-2,2,1)^T\\ \mathbf{u}_2 &= (3,-3,3,1)^T\\ \mathbf{u}_3 &= (8,6,-6,-8)^T\\ \mathbf{u}_4 &= (-1,-7,7,1)^T\end{aligned}$$

Der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^4$ ist definiert durch

$$U := \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\} \subset \mathbb{R}^4$$

1. Bestimmen Sie die Dimension von U. (2P)
2. Zeigen Sie: $\mathbf{u}_4 \in \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ und geben Sie eine Gleichung für $\mathbf{u}_4$ an. (1P)
3. Geben Sie eine Basis für U an. (0.5P)
4. Geben Sie einen Vektor $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3,v_4)^T \in \mathbb{R}^4$ mit folgenden Eigenschaften an:
   a) $(\mathcal{L}\{\mathbf{v}\})^\perp = U$
   b) $\|\mathbf{v}\| = 1$ (2P)
   c) $v_2 \geq 0$.
5. Mit dem aus Punkt 4 berechneten Vektor $\mathbf{v}$ wird durch $B := \{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{v}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ definiert. Geben Sie bezüglich dieser Basis eine Matrix A mit $\det(A) = 1$ an, die eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit folgenden Eigenschaften beschreibt:
   a) $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$
   b) $\varphi(U) = U$ (0.5P)
   c) $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Lösung:

1. Zeilenumformung von

$$C := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_1 - 4z_4 \\ z_2 + 2z_4 \\ z_3 - 2z_4 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 40 & -5 \\ 0 & -1 & -10 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_1 + z_3 \\ z_2 + z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_1/50 \\ \text{Umordnen von} \\ z_1 \text{ bis } z_4 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit zu $\dim U = \text{Rang}\,(C) = 3$.

2. Es gilt zu zeigen, dass sich $\mathbf{u}_4$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$ darstellen lässt, ob also Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\mathbf{u}_4 = a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2 + c\,\mathbf{u}_3 \quad \text{mit} \quad (a, b, c)^T \neq \mathbf{0}.$$

Durch Zeilenumformung der erweiterten Matrix $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3|\mathbf{u}_4)$ wie in Punkt 1,

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3|\mathbf{u}_4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

erhält man mit $c = 0$, $b = 5$ und $a = 1 - b = -4$ für $\mathbf{u}_4$ die Darstellung

$$\mathbf{u}_4 = -4\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 \quad \text{und damit} \quad \mathbf{u}_4 \in \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}.$$

3. Da $\dim U = 3$ und $\mathbf{u}_4 \in \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \implies \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist eine Basis für U.

4. Die Eigenschaft (a) vermittelt die Orthogonalität des gesuchten Vektors $\mathbf{v}$ zu den Basisvektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ von U und damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle &= 4v_1 - 2v_2 + 2v_3 + v_4 = 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle &= 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 + v_4 = 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_3 \rangle &= 8v_1 + 6v_2 - 6v_3 - 8v_4 = 0. \end{aligned}$$

Lösen des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 2z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_3/10 \\ z_1 + 2z_3 \\ z_2 + 6z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_2/(-5) \\ z_1 + z_2 \\ z_3 + z_2 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

führt zu $v_1 = 0$, $v_4 = 0$ und $v_2 = v_3 = t \in \mathbb{R}$ und damit zu

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Normierungsbedingung (b) folgt $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2t^2} = 1$ und damit $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Mit der Eigenschaft (c): $v_2 = t \geq 0$ folgt $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Insgesamt ist nun

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Eine Matrix, die eine Abbildung φ mit den geforderten Eigenschaften beschreibt, ist z.B.

$$A := [\varphi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 1.

(a) $A \neq I$.

(c) Der Vektor $\mathbf{v}$ wird durch $[\varphi(\mathbf{v})]_B = [\varphi]_{B,B} \cdot [\mathbf{v}]_B = A\,\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4 = [\mathbf{v}]_B$ wieder auf sich selbst abgebildet.

(b) Die Basisvektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$ von U werden durch die Abbildung φ mittels

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{u}_1)]_B &= [\varphi]_{B,B} \cdot [\mathbf{u}_1]_B = A\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = [\mathbf{u}_2]_B \\ [\varphi(\mathbf{u}_2)]_B &= [\varphi]_{B,B} \cdot [\mathbf{u}_2]_B = A\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = [\mathbf{u}_3]_B \\ [\varphi(\mathbf{u}_3)]_B &= [\varphi]_{B,B} \cdot [\mathbf{u}_3]_B = A\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 = [\mathbf{u}_1]_B \end{aligned}$$

vertauscht, d.h.

$$\varphi(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_{\pi_k} \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{und der Permutation} \quad \pi = 231$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(U) = U.$$

2. Beispiel

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und die reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & x \\ -2 & y & 3 \end{pmatrix} .$$

1. Geben Sie die Menge M aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an, für welche die durch A definierte Bilinearform

   $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_A := \mathbf{v}^T A \mathbf{w} , \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 ,$$

   ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ ist. (1.5P)

2. Es seien nun $x = y = 0$. Begründen Sie kurz, dass

   $$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie anschließend mit dem Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis U des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. (3.5P)

3. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{w} = \sqrt{5}\, \mathbf{e}_3$ durch die Basis U aus 2. dar. (1P)

Lösung:

1. Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ muss symmetrisch sein, was nur geht, wenn gilt $x = y$. Außerdem ist noch zu fordern, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ positiv definit ist, was äquivalent zur positiven Definitheit von A ist (Def. 6.6). Man berechnet für die Hauptminoren folgende Determinanten:

   $$\det M_1 = 2 , \quad \det M_2 = 8 , \quad \det M_3 = 24 - 16 - 2xy = 8 - 2xy .$$

   Satz 6.7 sagt aus, dass A genau dann positiv definit ist, wenn die oben angegebenen Determinanten positiv sind; also wenn gilt $8 - 2xy > 0$. Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ genau dann ein inneres Produkt, wenn gilt

   $$(x, y) \subset M = \left\{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 2 \right\} .$$

2. Die Vektoren sind l.u., da $\det(\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3) = 1$ ist (Dreiecksmatrix). Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist B nach Satz 1.10 (Maximaleigenschaft) eine Basis. Setze nun $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$. Dann ist nach Gram-Schmidt der Vektor $\mathbf{v}_2$ gegeben durch

   $$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_A}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_A} \mathbf{v}_1 .$$

   Berechnung der Koeffizienten:

   $$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{v}_1 \rangle_A = \mathbf{b}_2^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 ,$$

   $$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_A = \mathbf{v}_1^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 .$$

Zusammen folgt:

$$\mathbf{v}_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der letzte Vektor $\mathbf{v}_3$ ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_3 \quad = \quad \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{v}_1 \rangle_A}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_A} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{v}_2 \rangle_A}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_A} \mathbf{v}_2 \, .$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{v}_1 \rangle_A &= \mathbf{b}_3^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \, , \\
\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{v}_2 \rangle_A &= \mathbf{b}_3^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0,1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \, , \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_A &= \mathbf{v}_2^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1,0,0) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \, .
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbf{v}_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \, .$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sind bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ paarweise orthogonal, aber noch nicht normiert. Es bleibt also noch $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_A = \|\mathbf{v}_3\|^2$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_A &= \frac{1}{5} \mathbf{v}_3^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25} (4,-1,4) \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \, .
\end{aligned}$$

Die gesuchte ONB U ist also

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_A}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, , \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_A}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, , \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{\mathbf{v}_3}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle_A}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \, .
\end{aligned}$$

3. Die Koeffizienten der Darstellung $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$ sind nach Satz 5.9 durch $c_j = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_j \rangle_A$ gegeben. Aus den obigen Rechnungen liest man schnell ab:

$$\begin{aligned}
c_1 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_1 \rangle_A &= \sqrt{5}\,(0,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = 1\,,\\
c_2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_2 \rangle_A &= \sqrt{5}\,(0,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \sqrt{10}\,,\\
c_3 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_3 \rangle_A &= \sqrt{5}\,(0,0,1)\,\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix} = 2\,.
\end{aligned}$$

3. Beispiel

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A ist. Wie groß ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes? (1P)
2. Wie lauten die zum Eigenwert $\lambda = 1$ dazugehörigen Eigenvektoren und Hauptvektoren? Geben Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes an. (3P)
3. Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J von A. (1P)
4. Geben Sie die Transformationsmatrix T an, die mittels $T\,J\,T^{-1}$ die Jordan'sche Normalform J wieder in die Matrix A überführt. (1P)

Lösung:

1. Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ ist unter Zuhilfenahme der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) + (-2)3 + (-3)(-1)(-2) \\ &\quad -(-3)(3-\lambda)1 - (2-\lambda)3(-2) - (-2)(-1)(-2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= -(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Det $p(\lambda) = 0$ liefert den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $n = 3$.

2. Lösen der Gleichung $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ für $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} z_2 + z_1 \\ z_3 - z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

führt mit $x_2 = s$ und $x_3 = t \Rightarrow x_1 = 2s + 3t$ zum Eigenraum

$$E(1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$ hat also die Dimension 2. Damit ist die algebraische Vielfachheit $g = 2$ und es muss ein Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \in E(1)$ mit einem Hauptvektor $\mathbf{h}$ existieren. Das Gleichungssystem $(A - \lambda I)\,\mathbf{h} = \mathbf{v}_1$ muss also lösbar sein. Aus der erweiterten Matrix dieses Gleichungssystems erhalten wir nun

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & -3 & 2s+3t \\ -1 & 2 & 3 & s \\ 1 & -2 & -3 & t \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} z_2 + z_1 \\ z_3 - z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & -3 & 2s+3t \\ 0 & 0 & 0 & 3s+3t \\ 0 & 0 & 0 & -2s-2t \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $s = -t$. Mit der Wahl $s = 1 \;\Rightarrow\; t = -1$ erhält man für den Eigenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für den dazugehörigen Hauptvektor mittels $h_1 - 2h_2 - 3h_3 = 2s + 3t = -1$ und z.B. mit der Wahl $h_2 = h_3 = 0 \;\Rightarrow\; h_1 = -1$,

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter von $\mathbf{v}_1$ unabhängiger Eigenvektor $\mathbf{v}_2$ ist z.B.

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Eine mögliche Darstellung der, bis auf die Anordnung der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutigen, Jordan'schen Normalform ist somit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Die Spalten der Transformationsmatrix T ergeben sich nun aus den Eigen- und Hauptvektoren in Hinblick auf J zu

$$T = (\mathbf{v}_1, \mathbf{h}, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$