Lineare Algebra für TPH, UE
1. Zwischentest am 10.11.2006

Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2 &= -2x_4 \\ x_1 - x_4 &= 3x_3 + 1 \\ x_3 + x_4 &= x_2 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix A sowie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ des gegebenen Gleichungssystems. (1P)
2. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen A und $(A|\vec{b})$ und argumentieren Sie, ob das Gleichungssystem lösbar ist. (3P)
3. Bestimmen Sie den Kern der Matrix A. (1P)
4. Geben Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an. (1P)

Lösung:

1. Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$ sind:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (A|\vec{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

2. Durch Zeilenumformungen in folgender Weise

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{umordnen der Zeilen } z_1 \text{ bis } z_3,$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \qquad z_3 - 3z_1 \text{ und } z_2 \cdot (-1),$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 & -5 \end{array}\right] \qquad z_3/5,$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad z_3 + z_2,$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

folgt, dass Rang (A) = Rang $(A|\vec{b}) = 3$ und damit, dass das Gleichungssystem lösbar ist.

3. Für die Bestimmung von Kern(A) setzt man $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$, womit sich für

$x_4 = s,$
$x_3 = 0,$
$x_2 = x_3 + x_4 = s,$
$x_1 = 3x_3 + x_4 = s,$

$$\text{Kern } (A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ergibt.

4. Eine Partikulärlösung erhält man durch:

$x_4 = 0,$
$x_3 = -1,$
$x_2 = x_3 + x_4 = -1,$
$x_1 = 3x_3 + x_4 + 1 = -3 + 1 = -2.$

Damit ergibt sich eine Darstellung der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems mit

$$x = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\right\}.$$