Lineare Algebra für TPH, UE
2. Zwischentest am 24.11.2006

Gegeben sind die Basen

$$\begin{aligned} B &= \{(1,0)^T, (0,-1)^T\}, \\ C &= \{(1,0,1)^T, (0,3,1)^T, (1,2,2)^T\} \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wird bezüglich der kanonischen Basen E_2 des $\mathbb{R}^2$ und E_3 des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$A = [\varphi]_{E_3,E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

1. Wie lauten die Transformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{E_2,B}$ und $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$, die die Basiswechsel von B auf E_2 bzw. C auf E_3 beschreiben? (1P)
2. Ermitteln Sie die Transformationsmatrix $[\mathrm{id}]_{C,E_3}$. (3P)
3. Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_{C,B}$, die die Abbildung φ bezüglich der Basen B und C repräsentiert. (2P)

Lösung:

1. Die Transformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{E_2,B}$ und $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$ sind:

$$[\mathrm{id}]_{E_2,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{id}]_{E_3,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Durch Zeilenumformungen der erweiterten Matrix in folgender Weise

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad z_3 - z_1,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad z_2 - 3z_3,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad z_1 + z_2 \text{ und } z_3 + z_2,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad z_2 \cdot (-1) \text{ und } z_2 \leftrightarrow z_3,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

erhält man

$$[\mathrm{id}]_{C,E_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

als Inverse der Matrix $[\mathrm{id}]_{E_3,C}$.

3. Damit ergibt sich die Matrix $[\varphi]_{C,B}$ mit

$$\begin{aligned} [\varphi]_{C,B} &= [\mathrm{id}]_{C,E_3} \cdot [\varphi]_{E_3,E_2} \cdot [\mathrm{id}]_{E_2,B} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$