Lineare Algebra für TPH, UE
3. Zwischentest am 01.12.2006

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Determinante von A. (4P)
2. Für welche Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ wird die Matrix A singulär? (2P)

Hinweis: Die Determinante der Matrix A hat die Form:

$$\det(A) = \lambda^4 + p\,\lambda^3 + q\,\lambda^2 \quad \text{mit Zahlen } p \text{ und } q \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

1. Entwickeln nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, \det A_{1j} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & -\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)(-2) \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 4 \\ 3 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Weitere Entwicklung der zwei 3×3–Determinanten jeweils nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} \det A &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -\lambda & -6 \end{vmatrix}\right] + 2\left[(-1)\,3\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right] \\ &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(\lambda^2-12) - (-24)\right] + 2\left[(-3)(-4+2\lambda+4)\right] \\ &= (1-\lambda)\left[2\lambda^2 - 24 - \lambda^3 + 12\lambda + 24\right] - 6\,(2\lambda) \\ &= (1-\lambda)(2\lambda^2 - \lambda^3 + 12\lambda) - 12\lambda \\ &= 2\lambda^2 - \lambda^3 + 12\lambda - 2\lambda^3 + \lambda^4 - 12\lambda^2 - 12\lambda \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^3 - 10\lambda^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\det A = \lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda - 10).$$

2. Eine Matrix ist genau dann singulär, wenn ihre Determinante gleich 0 ist.
Der Term $\lambda^2 - 3\lambda - 10$ zerfällt unter Zuhilfenahme der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

in die Linearfaktoren $(\lambda - 5)$ und $(\lambda + 2)$.
Damit folgt die Singularität von A aus

$$\det A = \lambda^2(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

und somit für die Werte

$$\lambda \in \{-2; 0; 5\}.$$