Lineare Algebra für TPH, UE
4. Zwischentest am 26.01.2007

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. (1P)
2. Wie lauten die zu den Eigenwerten dazugehörigen Eigenvektoren und Hauptvektoren? (2P)
3. Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an. (1P)
4. Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform J von A. (1P)
5. Geben Sie die Transformationsmatrix T an, die mittels $T\,J\,T^{-1}$ die Jordan'sche Normalform J wieder in die Matrix A überführt. (1P)

Lösung:

1. Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda\, I) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & -1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(-4-\lambda) - 3(2-\lambda) - 3(-1)(2-\lambda) \\ &= -(2-\lambda)^2(4+\lambda). \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte aus $\det p(\lambda) = 0$ zu

$$\lambda_1 = 2^{(2)} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -4\,.$$

2. Lösen der Gleichung $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ für

- $\lambda_2 = -4$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_1 - 2z_3 \\ z_1 \leftrightarrow z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - 3z_3 \\ z_2 \leftrightarrow z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

führt mit $x_3 = -6s \;\Rightarrow\; x_2 = 3s \;\Rightarrow x_1 = s$ zum Eigenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$,

und für

- $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} z_2 - 3z_1 \\ z_1 \leftrightarrow z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

mit $x_3 = 0,\ x_2 = 3t\ \Rightarrow x_1 = t$ zum Eigenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert $\lambda = 2$ hat die Dimension 1. Daher erhalten wir aus dem Gleichungssystem $(A - \lambda I)\,\mathbf{h} = \mathbf{v}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} z_2 - 3z_1 \\ z_1 \leftrightarrow z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

mit $x_3 = 1,\ x_2 = 0\ \Rightarrow x_1 = 2$ den Hauptvektor $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Die algebraischen Vielfachheiten sind die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und die geometrischen Vielfachheiten sind die Dimensionen der zu den Eigenwerten (also Nullstellen von $p(\lambda)$) dazugehörigen Eigenräume.
Zusammenfassend erhalten wir also $n_1 = 2$ und $g_1 = 1$, sowie $n_2 = g_2 = 1$.

4. Eine mögliche Darstellung der, bis auf die Anordnung der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutigen, Jordan'schen Normalform ist somit

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Die Spalten der Transformationsmatrix T ergeben sich nun aus den Eigen- und Hauptvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten in Hinblick auf J zu

$$T = (v_1, h_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$