Gruppe A

1. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird bezüglich der kanonischen Basis $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$A = [\varphi(E)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Weiters ist eine Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,,$$

und ein Vektor $\mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\,\mathbf{b}_2$$

gegeben.

(a) Wie lauten die Transformationsmatrizen $T_{E\leftarrow B}$ und $T_{B\leftarrow E}$, die die Basiswechsel von B auf E bzw. E auf B beschreiben? (2P)

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi(B)]_B$, die die Abbildung φ bezüglich der Basis B angibt. (2P)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildvektoren von $\mathbf{v}$ dargestellt bezüglich der kanonischen Basis E und der Basis B, also $\varphi(\mathbf{v})$ und $[\varphi(\mathbf{v})]_B$. (2P)

Lösung:

(a) Aus

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

folgt durch Auflösen nach $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3\,, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3\,.$$

Die Spalten einer Transformationsmatrix bestehen aus den Koordinaten der alten Basis dargestellt bezüglich der neuen Basis. Daher ist

$$T_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B\leftarrow E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B ist

$$\begin{aligned} [\varphi(B)]_B &= T_{B\leftarrow E} \cdot [\varphi(E)]_E \cdot T_{E\leftarrow B} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Mit $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ist

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) &= [\varphi(E)]_E \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ [\varphi(\mathbf{v})]_B &= [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

2. Im Vektorraum $C([0,\pi])$ der auf dem Intervall $[0,\pi]$ stetigen Funktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum U der Polynome vom Grad 1, also

$$U = \left\{\, p(x)\ :\ p(x) = a_0 + a_1\, x \ \text{ mit } \ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \,\right\} \ \text{ mit der Monombasis } \{1, x\},$$

und die Funktion

$$f(x) = \sin(x)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für U. (2P)

(b) Wie lautet das Polynom $u(x)$ aus U, das die Funktion $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (3P)

(c) Wie groß ist der Fehler $\|f-u\|_2$? (1P)

Hinweis: $\int_0^\pi \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$

Lösung:

(a) Aus der Monombasis $\{v_1, v_2\} = \{1, x\}$ lässt sich unter Verwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine Othonormalbasis bestimmen.
Mit $w_1 = v_1 = 1$ und den inneren Produkten

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}x = \pi,\ \langle w_1, v_2\rangle = \int_0^\pi x\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}, \quad \text{ist} \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\, w_1 = x - \frac{\pi}{2}.$$

Aus

$$\langle w_2, w_2\rangle = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{12}$$

folgt nach Normieren der Vektoren w_1 und w_2,

$$\hat{w}_1 = \frac{w_1}{\|\hat{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \ \hat{w}_2 = \frac{w_2}{\|\hat{w}_2\|} = \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^3}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right), \ \text{ die ONB } \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\right\}$$

(b) Zum Polynom $u(x)$ gelangt man mittels Orthogonalprojektion. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\langle f, \hat{w}_1\rangle &= \int_0^\pi \sin(x)\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,,\\
\langle f, \hat{w}_2\rangle &= \int_0^\pi \sin(x) \sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) \mathrm{d}x = -\cos(x)\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\Bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\frac{2}{\pi}\ \mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

folgt

$$u(x) = \langle f, \hat{w}_1\rangle\ \hat{w}_1 + \langle f, \hat{w}_2\rangle\ \hat{w}_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,.$$

(c) Mit

$$\|f\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \|u\|^2 = \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi}$$

ist der Fehler

$$\|f-u\| = \sqrt{\|f\|^2 - \|u\|^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}} \approx 0.545$$

□

3. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. (1P)

(b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. (4P)

(c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$? (1P)

Lösung:

(a) Durch Entwickeln der 4×4–Determinante $\det(A - \lambda I)$ z.B nach der 4. Spalte erhält man das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A–\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(1-\lambda)^3.$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ mit $n_2 = 3$.

(b) Für den Eigenwert $\boxed{\lambda_1 = 0}$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_1 I)\,\mathbf{v} = 0$ und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$

$$\mathbf{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(0) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und damit der Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = 1}$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_2 I)\,\mathbf{v} = 0$ und z.B. durch die Wahl $x_4 = s$ und $x_3 = t$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraums $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 2$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 3$ einen Hauptvektor $\mathbf{h}$ geben, der eine partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 I)\,\mathbf{h} = \mathbf{v}$ ist. Dieses Gleichungssystem ist allerdings nur lösbar für $s = 0$ und führt nach Wahl von $t = 1$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ auf den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und zum dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter zu $\mathbf{v}_2$ linear unabhängiger Eigenvektor aus dem Eigenraum $E(1)$ ist zum Beispiel $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1)^T$.

(c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und die dazugehörige Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Gruppe B

1. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird bezüglich der kanonischen Basis $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$A = [\varphi(E)]_E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Weiters ist eine Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3\,,$$

und ein Vektor $\mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - 3\,\mathbf{b}_3$$

gegeben.

(a) Wie lauten die Transformationsmatrizen $T_{E\leftarrow B}$ und $T_{B\leftarrow E}$, die die Basiswechsel von B auf E bzw. E auf B beschreiben? (2P)

(b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi(B)]_B$, die die Abbildung φ bezüglich der Basis B angibt. (2P)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildvektoren von $\mathbf{v}$ dargestellt bezüglich der kanonischen Basis E und der Basis B, also $\varphi(\mathbf{v})$ und $[\varphi(\mathbf{v})]_B$. (2P)

Lösung:

(a) Aus

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$$

folgt durch Auflösen nach $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3\,, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}_3\,.$$

Die Spalten einer Transformationsmatrix bestehen aus den Koordinaten der alten Basis dargestellt bezüglich der neuen Basis. Daher ist

$$T_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B\leftarrow E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_B$ bezüglich der Basis B ist

$$\begin{aligned} [\varphi(B)]_B &= T_{B\leftarrow E} \cdot [\varphi(E)]_E \cdot T_{E\leftarrow B} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Mit $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - 3\,\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 3\,\mathbf{e}_3$ ist

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) &= [\varphi(E)]_E \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ [\varphi(\mathbf{v})]_B &= [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

2. Im Vektorraum $C([0,\pi])$ der auf dem Intervall $[0,\pi]$ stetigen Funktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\pi f(x)\, g(x)\; \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum U der Polynome vom Grad 1, also

$$U = \big\{\, p(x) \;:\; p(x) = a_0 + a_1\, x \;\text{ mit }\; a_0, a_1 \in \mathbb{R} \,\big\} \;\text{ mit der Monombasis } \{1, x\},$$

und die Funktion

$$f(x) = \cos(x)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für U. (2P)

(b) Wie lautet das Polynom $u(x)$ aus U, das die Funktion $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (3P)

(c) Wie groß ist der Fehler $\|f-u\|_2$? (1P)

Hinweis: $\int_0^\pi \cos^2(x)\; \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$

Lösung:

(a) Aus der Monombasis $\{v_1, v_2\} = \{1, x\}$ lässt sich unter Verwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine Othonormalbasis bestimmen.
Mit $w_1 = v_1 = 1$ und den inneren Produkten

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_0^\pi 1\; \mathrm{d}x = \pi,\;\; \langle w_1, v_2\rangle = \int_0^\pi x\; \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}, \quad \text{ist} \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\, w_1 = x - \frac{\pi}{2}.$$

Aus

$$\langle w_2, w_2\rangle = \int_0^\pi \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2\; \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{12}$$

folgt nach Normieren der Vektoren w_1 und w_2,

$$\hat{w}_1 = \frac{w_1}{\|\hat{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\;\; \hat{w}_2 = \frac{w_2}{\|\hat{w}_2\|} = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^3}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big), \quad \text{die ONB } \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, ,\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big) \right\}$$

(b) Zum Polynom $u(x)$ gelangt man mittels Orthogonalprojektion. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\langle f, \hat{w}_1\rangle = \int_0^\pi \cos(x)\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\; \mathrm{d}x = 0\,,$$

$$\langle f, \hat{w}_2\rangle = \int_0^\pi \cos(x)\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big)\; \mathrm{d}x = \sin(x)\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\, \frac{2}{\pi}\; \mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}\, \sqrt{\frac{3}{\pi}},$$

folgt

$$u(x) = \langle f, \hat{w}_1\rangle\; \hat{w}_1 + \langle f, \hat{w}_2\rangle\; \hat{w}_2 = -\frac{4}{\pi}\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big) = -\frac{12}{\pi^2}\,\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big)\,.$$

(c) Mit

$$\|f\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \|u\|^2 = \int_0^\pi \Big(-\frac{12}{\pi^2}\,\Big(\frac{2x}{\pi} - 1\Big)\Big)^2\; \mathrm{d}x = \frac{144}{3\,\pi^3}$$

ist der Fehler

$$\|f - u\| = \sqrt{\|f\|^2 - \|u\|^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{144}{3\,\pi^3}} \approx 0.151$$

□

3. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. (1P)

(b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. (4P)

(c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$? (1P)

Lösung:

(a) Durch Entwickeln der 4×4–Determinante $\det(A - \lambda I)$ z.B nach der 1. Spalte erhält man das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)^3.$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit $n_2 = 3$.

(b) Für den Eigenwert $\boxed{\lambda_1 = 0}$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v} = 0$ und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$

$$\mathbf{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(0) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und damit der Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = 2}$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v} = 0$ und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$ und $x_2 = t$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraums $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 2$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 3$ einen Hauptvektor $\mathbf{h}$ geben, der eine partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 I)\,\mathbf{h} = \mathbf{v}$ ist. Dieses Gleichungssystem ist allerdings nur lösbar für $s = 0$ und führt nach Wahl von $t = 1$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ auf den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und zum dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter zu $\mathbf{v}_2$ linear unabhängiger Eigenvektor aus dem Eigenraum $E(2)$ ist zum Beispiel $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 0)^T$.

(c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und die dazugehörige Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□