Gruppe A

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & = & 4 \\ 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 9\,x_3 & + & 27\,x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 5\,x_4 & = & 4 \\ & & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 5\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

1. Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des gegebenen Gleichungssystems an. (1P)
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Rang der Matrizen A und $(A|\mathbf{b})$. Interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (nicht lösbar, eindeutig lösbar oder mehr als eine Lösung - mit Begründung). (3P)
3. Wie lautet die allgemeine Lösung des Gleichungssystems? (2P)

Lösung:

1. Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \big(A|\mathbf{b}\big) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 9 & 27 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

2. Mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren erhält man durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 9 & 27 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - 6z_1 \\ z_3 - z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 18 & 9 & 27 & -18 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{18}\,z_2 \\ z_4 - z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 - 4z_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form.
Wegen Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= 3$ ist das Gleichungssystem lösbar aber nicht eindeutig lösbar, da Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= r = 3 < 4 = n = \dim(\mathbb{R}^4)$ ist. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt mit $n - r = 1$ und die allgemeine Lösung daher eine 1-parametrige Lösungsschar.

3. Die obige Koeffizientenmatrix liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & = & 4\,, \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & + & \frac{3}{2}\,x_4 & = & -1\,, \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 4\,. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung erhält man nun zum Beispiel mit der Wahl $x_4 = s\,,\ s \in \mathbb{R}$, durch kontinuierliches Zurückeinsetzen in das Gleichungssystem beginnend mit der letzten Gleichung,

$$\left.\begin{array}{rcl} x_3 & = & 4 + x_4 = 4 + s\,, \\ x_2 & = & -1 - \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4 = -3 - 2s\,, \\ x_1 & = & 4 + 2\,x_2 = -2 - 4s\,. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}\,.$$

$\square$

Gruppe B

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & 6\,x_4 & = & -5 \\ x_1 & + & 5\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 12\,x_4 & = & -9 \\ 6\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 14\,x_4 & = & 8 \\ & & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & -4 \end{array}$$

1. Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des gegebenen Gleichungssystems an. (1P)
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Rang der Matrizen A und $(A|\mathbf{b})$. Interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (nicht lösbar, eindeutig lösbar oder mehr als eine Lösung - mit Begründung). (3P)
3. Wie lautet die allgemeine Lösung des Gleichungssystems? (2P)

Lösung:

1. Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 12 \\ 6 & -4 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 1 & 5 & 2 & 12 & -9 \\ 6 & -4 & 2 & 14 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right).$$

2. Mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren erhält man durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 1 & 5 & 2 & 12 & -9 \\ 6 & -4 & 2 & 14 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - z_1 \\ z_3 - 6z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & -10 & 2 & -22 & 38 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_4 - z_2 \\ \frac{1}{4}\, z_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -10 & 2 & -22 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 + 10z_2 \\ \frac{1}{7}\, z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form.
Wegen Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= 3$ ist das Gleichungssystem lösbar aber nicht eindeutig lösbar, da Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= r = 3 < 4 = n = \dim(\mathbb{R}^4)$ ist. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt mit $n - r = 1$ und die allgemeine Lösung daher eine 1-parametrige Lösungsschar.

3. Die obige Koeffizientenmatrix liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & 6\,x_4 & = & -5\,, \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & + & \frac{3}{2}\,x_4 & = & -1\,, \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 4\,. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung erhält man nun zum Beispiel mit der Wahl $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$, durch kontinuierliches Zurückeinsetzen in das Gleichungssystem beginnend mit der letzten Gleichung,

$$\left.\begin{array}{rcl} x_3 & = & 4 + x_4 = 4 + s\,, \\ x_2 & = & -1 - \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4 = -3 - 2s\,, \\ x_1 & = & -5 - x_2 - 6\,x_4 = -2 - 4s\,. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}\,.$$

□

Gruppe C

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 1 \\ 10\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 24\,x_4 & = & 14 \\ x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 10\,x_4 & = & -6 \\ & & 5\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & -7 \end{array}$$

1. Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des gegebenen Gleichungssystems an. (1P)
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Rang der Matrizen A und $(A|\mathbf{b})$. Interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (nicht lösbar, eindeutig lösbar oder mehr als eine Lösung - mit Begründung). (3P)
3. Wie lautet die allgemeine Lösung des Gleichungssystems? (2P)

Lösung:

1. Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 10 & -6 & 4 & 24 \\ 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \big(A|\mathbf{b}\big) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & -6 & 4 & 24 & 14 \\ 1 & 4 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & -7 \end{array}\right).$$

2. Mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren erhält man durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & -6 & 4 & 24 & 14 \\ 1 & 4 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - 10z_1 \\ z_3 - z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{4}\, z_2 \\ z_4 - z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 - 5z_1 \\ -\frac{1}{3}\, z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form.
Wegen Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= 3$ ist das Gleichungssystem lösbar aber nicht eindeutig lösbar, da Rang(A)= Rang($A|\mathbf{b}$) $= r = 3 < 4 = n = \dim(\mathbb{R}^4)$ ist. Das Gleichungssystem ist also unterbestimmt mit $n - r = 1$ und die allgemeine Lösung daher eine 1-parametrige Lösungsschar.

3. Die obige Koeffizientenmatrix liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 1\,, \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1\,, \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 4\,. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung erhält man nun zum Beispiel mit der Wahl $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$, durch kontinuierliches Zurückeinsetzen in das Gleichungssystem beginnend mit der letzten Gleichung,

$$\left.\begin{array}{rcl} x_3 & = & 4 + x_4 = 4 + s\,, \\ x_2 & = & 1 - x_3 - x_4 = -3 - 2s\,, \\ x_1 & = & 1 + x_2 - 2\,x_4 = -2 - 4s\,. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}\,.$$

□