Gruppe A

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen inneren Produkt ist die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Begründen Sie, warum B auch tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (2P)
2. Konstruieren Sie mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt unter Verwendung der obigen Basisvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. (4P)

Lösung:

1. Die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 0 - 8 - 16 - 0 = -8 \neq 0\,.$$

   Die Matrix $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist also regulär, d.h. die Spaltenvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ sind linear unabhängig, und je drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden ein Basis des $\mathbb{R}^3$.

2. Mit $\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1$ und den inneren Produkten

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 16 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

   ist

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{16}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Weiters ist

$$\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8\,, \; \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,,$$

   womit

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   folgt. Es ist nun $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Mit

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 8 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{w}_i\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}\,, \; i = 1, 2, 3,$$

   führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

   auf die Orthonormalbasis

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Gruppe B

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen inneren Produkt ist die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Begründen Sie, warum B auch tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (2P)
2. Konstruieren Sie mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt unter Verwendung der obigen Basisvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. (4P)

Lösung:

1. Die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 18 - 18 - 0 - 8 = -8 \neq 0\,.$$

Die Matrix $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist also regulär, d.h. die Spaltenvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ sind linear unabhängig, und je drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden ein Basis des $\mathbb{R}^3$.

2. Mit $\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1$ und den inneren Produkten

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

ist

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{12}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiters ist

$$\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8\,, \ \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,,$$

womit

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt. Es ist nun $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Mit

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{w}_i\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}\,, \ i = 1, 2, 3,$$

führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

auf die Orthonormalbasis

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Gruppe C

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen inneren Produkt ist die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Begründen Sie, warum B auch tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (2P)
2. Konstruieren Sie mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt unter Verwendung der obigen Basisvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. (4P)

Lösung:

1. Die Determinante $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 0 + 0 - 0 - 8 - 40 = -8 \neq 0\,.$$

   Die Matrix $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ist also regulär, d.h. die Spaltenvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ sind linear unabhängig, und je drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden ein Basis des $\mathbb{R}^3$.

2. Mit $\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1$ und den inneren Produkten

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 20 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

   ist

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{20}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Weiters ist

$$\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 8\,, \ \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\,,$$

   womit

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\, \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   folgt. Es ist nun $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Mit

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{w}_i\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}\,,\ i = 1, 2, 3,$$

   führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_3$,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   auf die Orthonormalbasis

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□