Gruppe A

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt sind der Unterraum $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ und der Vektor $\mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U. (2P)
2. Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an. (1P)
3. Wie lautet der Vektor $\mathbf{u} \in U$, der den Vektor $\mathbf{v}$ bestmöglichst approximiert? (2P)
4. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ der beiden Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. (1P)

Lösung:

1. Da jeder Vektor $\mathbf{x} \in U^\perp$ orthogonal ist zu jedem Vektor $\mathbf{u} \in U$, gilt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0 \;\; \forall \mathbf{x} \in U^\perp, \forall \mathbf{u} \in U$.
   Es muss also jedes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in U^\perp$ Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

   $$\left.\begin{array}{rcrcl} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle &=& 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &=& 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle &=& x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &=& 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &=& 0 \end{array}$$

   sein. Zum Beispiel mit der Wahl $x_3 = s$ und $x_4 = t,\; s$ und $t \in \mathbb{R}$, erhält man

   $$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit eine Basis von } U^\perp : \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Da $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ ist, sind die Vektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ bereits zueinander orthogonal.
   Aus $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 15$ und $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 15$ folgt durch Normieren der Vektoren aus U eine

   $$\text{Orthonormalbasis von } U : \quad \{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Zum Vektor $\mathbf{u} \in U$ gelangt man nun mittels Orthogonalprojektion von $\mathbf{v}$ auf den Unterraum U.
   Die Fourierkoeffizienten von $\mathbf{v}$ bezüglich der ONB von U sind

   $$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{15}},$$

   woraus

   $$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \hat{\mathbf{u}}_1 + \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_2 \rangle \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   folgt.

4. Der Abstand $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ lässt sich entweder mit $\sqrt{\|\mathbf{v}\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2}$ oder direkt berechnen, d.h mit

   $$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \frac{10}{3}$$

   und somit der Abstand zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gleich $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

□

Gruppe B

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt sind der Unterraum $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ und der Vektor $\mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U. (2P)
2. Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an. (1P)
3. Wie lautet der Vektor $\mathbf{u} \in U$, der den Vektor $\mathbf{v}$ bestmöglichst approximiert? (2P)
4. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ der beiden Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. (1P)

Lösung:

1. Da jeder Vektor $\mathbf{x} \in U^\perp$ orthogonal ist zu jedem Vektor $\mathbf{u} \in U$, gilt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in U^\perp, \forall \mathbf{u} \in U$. Es muss also jedes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in U^\perp$ Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle & = & x_1 + 3\,x_2 + x_3 - 2\,x_4 & = & 0 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle & = & -2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 3\,x_2 + x_3 - 2\,x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}$$

   sein. Zum Beispiel mit der Wahl $x_3 = s$ und $x_4 = t$, s und $t \in \mathbb{R}$, erhält man

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit eine Basis von } U^\perp : \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Da $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ ist, sind die Vektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ bereits zueinander orthogonal. Aus $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 15$ und $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 15$ folgt durch Normieren der Vektoren aus U eine

$$\text{Orthonormalbasis von } U : \quad \{\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Zum Vektor $\mathbf{u} \in U$ gelangt man nun mittels Orthogonalprojektion von $\mathbf{v}$ auf den Unterraum U. Die Fourierkoeffizienten von $\mathbf{v}$ bezüglich der ONB von U sind

$$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{15}} \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{15}},$$

   woraus

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle\, \hat{\mathbf{u}}_1 + \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_2 \rangle\, \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{3}{\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   folgt.

4. Der Abstand $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ lässt sich entweder mit $\sqrt{\|\mathbf{v}\|_2^2 - \|\mathbf{u}\|_2^2}$ oder direkt berechnen, d.h mit

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \frac{10}{3}$$

   und somit der Abstand zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gleich $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}$. □

Gruppe C

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt sind der Unterraum $U=\mathcal{L}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ und der Vektor $\mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U. (2P)
2. Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an. (1P)
3. Wie lautet der Vektor $\mathbf{u}\in U$, der den Vektor $\mathbf{v}$ bestmöglichst approximiert? (2P)
4. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ der beiden Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. (1P)

Lösung:

1. Da jeder Vektor $\mathbf{x}\in U^\perp$ orthogonal ist zu jedem Vektor $\mathbf{u}\in U$, gilt $\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle=0\ \ \forall\mathbf{x}\in U^\perp,\forall\mathbf{u}\in U$. Es muss also jedes $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in U^\perp$ Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{rclcl}\langle\mathbf{x},\mathbf{u}_1\rangle&=&-3x_1+2x_2-x_3+x_4&=&0\\ \langle\mathbf{x},\mathbf{u}_2\rangle&=&x_1+x_2+2x_3+3x_4&=&0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \begin{array}{rcl}x_1+x_2+2x_3+3x_4&=&0\\ x_2+x_3+2x_4&=&0\end{array}$$

sein. Zum Beispiel mit der Wahl $x_3=s$ und $x_4=t,\ s$ und $t\in\mathbb{R}$, erhält man

$$\mathbf{x}=s\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und damit eine Basis von } U^\perp:\quad\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Da $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle=0$ ist, sind die Vektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ bereits zueinander orthogonal. Aus $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle=15$ und $\langle\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle=15$ folgt durch Normieren der Vektoren aus U eine

$$\text{Orthonormalbasis von } U:\quad\{\hat{\mathbf{u}}_1,\hat{\mathbf{u}}_2\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

3. Zum Vektor $\mathbf{u}\in U$ gelangt man nun mittels Orthogonalprojektion von $\mathbf{v}$ auf den Unterraum U. Die Fourierkoeffizienten von $\mathbf{v}$ bezüglich der ONB von U sind

$$\langle\mathbf{v},\hat{\mathbf{u}}_1\rangle=\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\quad\text{und}\quad\langle\mathbf{v},\hat{\mathbf{u}}_2\rangle=\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{7}{\sqrt{15}},$$

woraus

$$\mathbf{u}=\langle\mathbf{v},\hat{\mathbf{u}}_1\rangle\,\hat{\mathbf{u}}_1+\langle\mathbf{v},\hat{\mathbf{u}}_2\rangle\,\hat{\mathbf{u}}_2=-\frac{1}{\sqrt{15}}\,\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{\sqrt{15}}\,\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}$$

folgt.

4. Der Abstand $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2$ lässt sich entweder mit $\sqrt{\|\mathbf{v}\|_2^2-\|\mathbf{u}\|_2^2}$ oder direkt berechnen, d.h mit

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{ist}\quad\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2=\langle\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\frac{2}{3}$$

und somit der Abstand zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gleich $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$. □