ÜBUNGSSKRIPTUM zur LINEAREN ALGEBRA für TPH

Gabriela Schranz-Kirlinger

Peter Szmolyan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wien, 2005

Inhaltsverzeichnis

AUFGABEN

LÖSUNGEN

AUFGABEN

Kapitel 1

Vektorräume

1.1

a) Skizzieren Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3\boldsymbol{a}, \quad -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\ .$$

b) Skizzieren Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\boldsymbol{a}, \quad 3\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\ .$$

1.2 Es sei $V = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Auf V werden die folgenden Operationen der Addition in V und der Multiplikation mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$ definiert:

a) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d), \quad s(a,b) = (sa, sb),$

b) $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d), \quad s(a,b) = (s^2a, s^2b)\ .$

Untersuchen Sie, ob V mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

1.3 Beweisen Sie, dass die Menge $P_n := \{p(x) : p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n\}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Verknüpfungen ein Vektorraum ist:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i,$$

$$(sp)(x) = sp(x) = s\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} s a_i x^i.$$

P_n ist der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ von Grad $\leq n$.

1.4 Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von V ist, und interpretieren Sie W geometrisch.

a) $W = \{(x_1, x_2, 0)^T : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$,

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b},\ s, t \in \mathbb{R}\}$ mit

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob W ein Unterraum von V ist.

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ und } x_1 \geq 0\}$,

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

1.6 Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes P_n der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{R}$?

a) $\{p \in P_n : \text{ Grad } p(x) \geq 2 \text{ oder } p(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

b) $\{p \in P_n : p(0) = 0\}$

c) $\{p \in P_n : p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } a_j = 0 \text{ falls } j \text{ ungerade }\}$

1.7 V sei Vektorraum über K, U sei Unterraum von V. Für $\boldsymbol{x} \in V$ sind die *Nebenklassen* $\boldsymbol{x} + U := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u} \in U\}$ und $V/U := \{\boldsymbol{x} + U : \boldsymbol{x} \in V\}$. Jedes $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{x} + U$ ist ein *Repräsentant* von $\boldsymbol{x} + U$, da dann natürlich gilt $\boldsymbol{r} + U = \boldsymbol{x} + U$. Für V/U werden Verknüpfungen definiert durch:

$$(\boldsymbol{x} + U) + (\boldsymbol{y} + U) := (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + U, \quad \alpha(\boldsymbol{x} + U) := \alpha\boldsymbol{x} + U, \qquad \alpha \in K.$$

Zeigen Sie, dass V/U wieder ein Vektorraum über K ist. V/U heißt *Quotientenraum* von V nach U.

Achtung: Man muss auch zeigen, dass die Verknüpfungen in V/U *wohldefiniert* sind, d.h. es ist zu zeigen, dass die Operationen in V/U nicht von den gewählten Repräsentanten abhängen.

1.8 Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ und } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ ein Unterraum in $\mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Mengen $\boldsymbol{v} + U$ für $\boldsymbol{v} \in V$ und geben Sie deren geometrische Bedeutung an.

1.9 Sei V ein Vektorraum und $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$. Zeigen Sie, dass die lineare Hülle $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ ein Unterraum von V ist.

1.10 Sei V ein Vektorraum. Für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ gelte: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$$

1.11 Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^3$ als direkte Summe der Unterräume U, V darstellbar ist.

$$U = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad V = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

1.12 Sind die Vektoren

a) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,2)^T$,

b) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,0)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)^T$,

c) $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,1)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,2)^T$,

linear abhängig in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$?

1.13 Es sei P_5 der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ mit Grad ≤ 5. Es seien

$$p(x) = x + x^2 - x^3 + 2x^5 \quad \text{und} \quad q(x) = 2 + x + x^3 + x^4.$$

Zeigen Sie, dass p und q linear unabhängig sind.

1.14 Sind die Polynome

a) $x,\ x^2-2,\ x^3+x,\ x^3+2x^2+1$ bzw.

b) $1,\ x,\ x^2-2,\ x^3+x,\ x^3+2x^2+1$

linear abhängig im Vektorraum der Polynome P_3 ?

1.15 Schreiben Sie den Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ als Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3 \in V$. Ist $B = \{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ eine Basis von V?

a) $V = \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) $V = P_2$ der Raum der Polynome mit Grad kleiner gleich 2.

$$\boldsymbol{v} = t^2 + 4t - 3, \quad \boldsymbol{b}_1 = t^2 - 2t + 5,\ \boldsymbol{b}_2 = 2t^2 - 3t,\ \boldsymbol{b}_3 = t + 3 .$$

1.16 Zeigen Sie: Jeder Körper $(K, +, \cdot)$ kann als Vektorraum über sich selbst aufgefasst werden. Was ist seine Dimension?

1.17 Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob die Menge W ein Unterraum von V ist. Wenn ja, bestimmen Sie die Dimension von W und eine Basis von W.

a) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

b) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$.

1.18 Überprüfen Sie, ob die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Untersuchen Sie, auf wie viele Arten zwei dieser Vektoren gegen die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausgetauscht werden können, so dass wieder eine Basis entsteht.

1.19 Es seien U und W die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \quad W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\} .$$

Man bestimme die Dimension und eine Basis von: U, W, $U \cap W$, $U + W$.
Man überprüfe anhand dieses Beispiels den Satz:

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) .$$

1.20 Sei $E_5 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_5\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^5$ und

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_5 .$$

a) Geben Sie die Koordinaten von $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, 3$ bezüglich der kanonischen Basis an.

b) Geben Sie alle Möglichkeiten an, $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ mit Vektoren der kanonischen Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen.

Kapitel 2

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

2.1 Schreiben Sie folgende Matrizen elementeweise an:

a) $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 2i - 4ij \qquad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2;$

b) $B = (b_{lk})$ mit $b_{lk} = l^k \qquad l = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, n.$

2.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + B$, $3B$, $-2B$, $A + 2B$, $B - A$, A^T, B^T.

2.3 Beweisen Sie durch direktes Nachrechnen, dass die $m \times n$–Matrizen hinsichtlich der Matrizenaddition und der Multiplikation mit einem Skalar einen linearen Vektorraum $M_{m,n}(K)$ über K bilden.

2.4 Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller (2×2)-Matrizen, über $\mathbb{R}$. Man zeige zuerst, dass B eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist:

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$$

a) Was ist der Koordinatenvektor $[A]_B$ von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$?

b) Was ist die Dimension von $M_{2,2}(\mathbb{R})$? Allgemein: dim $M_{m,n}(K)$?