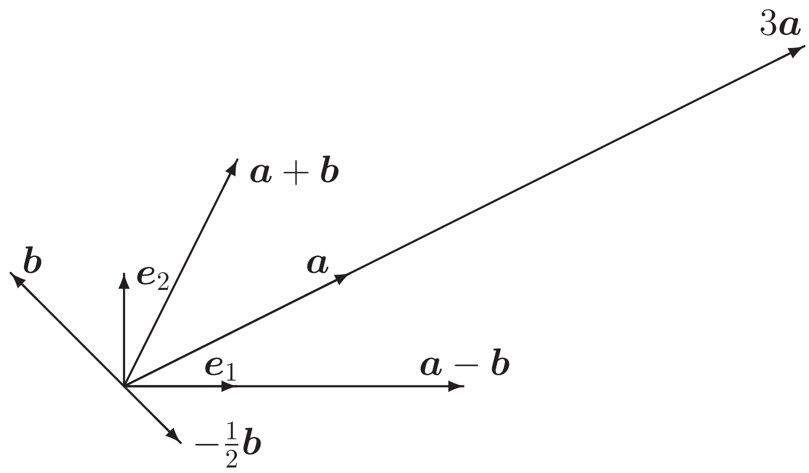
LÖSUNGEN

Kapitel 1

Vektorräume

1.1

a) Folgende Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind dargestellt: $3\boldsymbol{a}$, $\frac{-1}{2}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$



b) Die Darstellung folgender Vektoren des $\mathbb{R}^3$ liefert ein ähnliches Bild: $-\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

1.2 Es sei $V = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Es ist zu überprüfen, ob V mit den gegebenen Operationen, Addition und Multiplikation mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$, einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet:

a) Aus den Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ erhält man: $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

Das Assoziativgesetz für die Multiplikation mit Skalaren gilt wegen:

$$(st)(a,b) = (sta, stb) = s(ta, tb)$$

Die beiden Distributivgesetze erhält man aus:

$$\begin{aligned}
(s+t)(a,b) &= ((s+t)a,(s+t)b) &&= (sa+ta, sb+tb) \\
&= (sa,sb)+(ta,tb) &&= s(a,b)+t(a,b) \\
s((a,b)+(c,d)) &= s(a+c,b+d) &&= (sa+sc,sb+sd) \\
&= (sa,sb)+(sc,sd) &&= s(a,b)+s(c,d)
\end{aligned}$$

Nun fehlt nur noch: $1(a,b) = (1a, 1b) = (a,b)$. Somit ist $V = \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum.

b) Das 1. Distributivgesetz ist nicht erfüllt, denn:

$$(s+t)(a,b) = s(a,b)+t(a,b)+(2sta, 2stb)$$

Daher bildet V mit diesen Operationen *keinen* Vektorraum über $\mathbb{R}$.

1.3 $(P_n,+)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem Nullpolynom als neutralem Element. Das Nullpolynom in P_n ist das Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i = 0$ für $i = 0,1,\ldots,n$ und wird wie üblich mit $p = 0$ geschrieben. Assoziativität und Kommutativität ergeben sich durch die entsprechenden Gesetze in $\mathbb{R}$. Zu $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist das Polynom $-p(x) = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$ inverses Element.

Beweis des 1.Distributivgesetztes:

$$(\alpha+\beta)\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(\alpha+\beta)a_i x^i = \sum_{i=0}^{n}\alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n}\beta a_i x^i = \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Analog werden die übrigen Vektorraumaxiome bewiesen.

1.4

a) Angenommen $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0)^T \in W$ und $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, 0)^T \in W$. Dann gilt $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, 0)^T \in W$ und $s\boldsymbol{v} = (sv_1, sv_2, 0)^T \in W$. W ist Unterraum und geometrisch interpretiert die $x_1 - x_2$ Ebene.

b) Angenommen $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in W$ und $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)^T \in W$. Dann gilt $v_1+v_2+v_3 = 0$ und $w_1+w_2+w_3 = 0$ und daher auch $v_1+w_1+v_2+w_2+v_3+w_3 = v_1+v_2+v_3+w_1+w_2+w_3 = 0+0 = 0$ und $s(v_1+v_2+v_3) = s0 = 0$ für alle $s \in K$; d.h. auch $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in W$ und $s\boldsymbol{v} \in W$. W ist Unterraum und geometrisch interpretiert eine Ebene, die durch den Ursprung verläuft und im rechten Winkel zum Vektor $(1,1,1)$ steht.

c) Angenommen $\boldsymbol{v} = s_1\boldsymbol{a} + t_1\boldsymbol{b} \in W$ und $\boldsymbol{w} = s_2\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} \in W$. Dann gilt auch $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = s_1\boldsymbol{a}+t_1\boldsymbol{b}+s_2\boldsymbol{a}+t_2\boldsymbol{b} = (s_1+s_2)\boldsymbol{a}+(t_1+t_2)\boldsymbol{b} \in W$ und $c\boldsymbol{v} = cs_1\boldsymbol{a}+ct_1\boldsymbol{b} \in W$. W ist Unterraum und geometrisch interpretiert eine Ebene durch den Ursprung, die von den beiden Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ aufgespannt wird.

1.5

a) Es gilt $\boldsymbol{v} = (1,0,0)^T \in W$ und $k = -1 \in \mathbb{R}$. Aber $k\boldsymbol{v} = (-1,0,0)^T$ ist kein Element von W, daher ist W kein Unterraum von V.

b) Es gilt $\boldsymbol{v} = (1,1,1)^T \in W$ und $k = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Aber $k\boldsymbol{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ ist kein Element von W, daher ist W kein Unterraum von V.

1.6

a) Die angegebene Menge ist kein Unterraum. Es liegen z.B. $x^2 + x$ und $-x^2$ in der Menge, aber die Summe dieser Polynome ist ein Polynom vom Grad 1 und liegt damit nicht in der Menge.

b) $U = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$ ist ein Unterraum von P_n. Das Nullpolynom liegt in U. Sind $p, q \in U$, d.h. ist $p(0) = 0$ und $q(0) = 0$, dann ist auch $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0$, also $p + q \in U$. Mit $p \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = 0$, also $\alpha p \in U$.

c) Die angegebene Menge aller Polynome, die nur Potenzen von x mit geraden Exponenten enthalten, ist ebenfalls ein Unterraum von P_n. Das Nullpolynom gehört zur Menge. Die Summe zweier Polynome mit nur geraden Exponenten ist wieder ein Polynom mit nur geraden Exponenten und die Multiplikation mit einem Skalar erhält ebenfalls die geraden Exponenten.

1.7 Es ist zunächst zu zeigen, dass die in V/U definierten Operationen nicht von den gewählten Repräsentanten der Nebenklassen abhängen, d.h für

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{x} + U \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{y} + U$$

$$\Rightarrow \quad (\boldsymbol{a} + U) + (\boldsymbol{b} + U) = (\boldsymbol{x} + U) + (\boldsymbol{y} + U)$$

Diese Behauptung wird nun bewiesen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{x} + U & \Rightarrow & \exists \boldsymbol{u} \in U & \text{mit} & \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{y} + U & \Rightarrow & \exists \boldsymbol{v} \in U & \text{mit} & \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{v} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+U)+(\boldsymbol{b}+U) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v})+U \quad = \quad (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+U \\ &= (\boldsymbol{x}+U)+(\boldsymbol{y}+U)\end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von $s(\boldsymbol{x}+U)$ beweist man analog.

Es wird nun gezeigt, dass V/U eine kommutative Gruppe ist. Die Assoziativität gilt in V/U, da die Assoziativität in V gilt. Neutrales Element in V/U ist $\mathbf{0}+U=U$. Es gilt nämlich $(\boldsymbol{x}+U)+U=\boldsymbol{x}+U$ für alle $\boldsymbol{x}+U\in V/U$. Zu $\boldsymbol{x}+U$ ist das Element $-\boldsymbol{x}+U$ invers, da $(\boldsymbol{x}+U)+(-\boldsymbol{x}+U)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})+U=\mathbf{0}+U=U$ gilt. Das Kommutativgesetz ist in V/U erfüllt, da es in V erfüllt ist.

Beweis des 1.Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\boldsymbol{x}+U) &= (\alpha+\beta)\boldsymbol{x}+U = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}+U \\ &= \alpha\boldsymbol{x}+U+\beta\boldsymbol{x}+U = \alpha(\boldsymbol{x}+U)+\beta(\boldsymbol{x}+U).\end{aligned}$$

Beweis des 2.Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}\alpha((\boldsymbol{x}+U)+(\boldsymbol{y}+U)) &= \alpha((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+U) = \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+U \\ &= \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}+U+U = \alpha(\boldsymbol{x}+U)+\alpha(\boldsymbol{y}+U).\end{aligned}$$

Entprechend werden die übrigen Vektorraumaxiome bewiesen.

1.8 U ist eine Ebene durch den Ursprung $\mathbf{0}=(0,0,0)$ und die Nebenklassen von U sind die Ebenen parallel zu U. Anders ausgedrückt sind die Nebenklassen von U die Lösungsmengen der Schar von Gleichungen $2x+3y+4z=s, s\in\mathbb{R}$. Insbesondere ist die Nebenklasse $\boldsymbol{u}+U$ für $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$ die Lösungsmenge der linearen Gleichung $2x+3y+4z=2a+3b+4c$.

1.9 Behauptung : Die lineare Hülle $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$ mit $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\in V$, $k\in\mathbb{N}$ ist ein Unterraum von V.

Beweis: Für $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$ gilt $\boldsymbol{v}=s_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+s_k\boldsymbol{v}_k$ und $\boldsymbol{u}=t_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+t_k\boldsymbol{v}_k$. Dann gilt $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}=(s_1+t_1)\boldsymbol{v}_1+\cdots+(s_k+t_k)\boldsymbol{v}_k\in\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$. Analog folgt aus $\boldsymbol{v}\in\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$ auch $t\boldsymbol{v}=t(s_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+s_k\boldsymbol{v}_k)=ts_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+ts_k\boldsymbol{v}_k\in\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$.

1.10 Wir zeigen $\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\subseteq\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\subseteq\mathcal{L}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\subseteq\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Daraus folgt dann die Behauptung

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=\mathcal{L}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\ .$$

Wegen $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ kann man jeden der Vektoren als Linearkombination der beiden anderen ausdrücken

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\ .$$

Beweis von $\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \subseteq \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$: Sei $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \quad \Rightarrow$

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) = (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{a} - \lambda_2\boldsymbol{c}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \subseteq \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \subseteq \mathcal{L}(b,\boldsymbol{c})$ und $\mathcal{L}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \subseteq \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ zeigt man völlig analog.

1.11 Aus $\mathbb{R}^3 = U + V$ und $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ folgt die Behauptung.

1.12

a) Der Ansatz $s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + s_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ d.h. explizit:

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt auf die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 & + & & & s_3 & = & 0 \\ & & s_2 & + & 2s_3 & = & 0. \end{array}$$

Setzt man $s_3 = t \in \mathbb{R}$, erhält man $s_1 = -t$ und $s_2 = -2t$. Für $t = 1$ ergibt sich $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = 1$, daher sind diese Vektoren linear abhängig im $\mathbb{R}^2$.

b) Der Ansatz $s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + s_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ führt auf

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \\ 2s_2 + 2s_3 &= 0 \\ 3s_3 &= 0 \end{aligned}$$

woraus sofort $s_i = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und daher die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ folgt.

c) Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 0 \\ 2s_1 + 2s_2 &= 0 \\ 3s_1 + s_2 + 2s_3 &= 0 \end{aligned}$$

folgt $s_2 = t \in \mathbb{R}$, $s_1 = -t$ und $s_3 = t$. Die Wahl $s_2 = t = 1 \neq 0$ ist möglich, daher sind diese Vektoren linear abhängig.

1.13 Der Ansatz $s_1 p(x) + s_2 q(x) = 0$ lautet explizit:

$$s_1(x + x^2 - x^3 + 2x^5) + s_2(2 + x + x^3 + x^4) = 0$$

Durch Koeffizientenvergleich beim konstanten Element 2 erhält man $s_2 = 0$. Daraus folgt $s_1 = 0$.

1.14

a) Der Ansatz $s_1 x + s_2(x^2 - 2) + s_3(x^3 + x) + s_4(x^3 + 2x^2 + 1) = 0$

führt nach Koeffizientenvergleich auf folgendes System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} -2s_2 + s_4 &= 0 \\ s_1 + s_3 &= 0 \\ s_2 + 2s_4 &= 0 \\ s_3 + s_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wird s_4 aus der ersten Gleichung explizit ausgedrückt und in die dritte Gleichung eingesetzt, folgt sofort $s_2 = 0$ und mit der ersten Gleichung $s_4 = 0$. Weiters folgt dann aus der vierten bzw. zweiten Gleichung $s_3 = 0$ bzw. $s_1 = 0$. D.h. die angegebenen Polynome sind linear unabhängig in P_3.

b) $s_1 1 + s_2 x + s_3(x^2 - 2) + s_4(x^3 + x) + s_5(x^3 + 2x^2 + 1) = 0$

$$\begin{aligned} s_1 - 2s_3 + s_5 &= 0 \\ s_2 + s_4 &= 0 \\ s_3 + 2s_5 &= 0 \\ s_4 + s_5 &= 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 5 Unbekannten. Setzt man $s_5 = t \in \mathbb{R}$ so folgt aus der vierten Gleichung, dritten Gleichung $s_4 = -t$ und $s_3 = -2t$. Weiters folgt aus der zweiten und schließlich aus der ersten Gleichung $s_2 = t$ und $s_1 = -5t$. Die Wahl $t \neq 0$ ist möglich, daher sind diese Polynome linear abhängig in P_3.

1.15

a) Die drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn sie l.u. sind.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Dies führt auf das lineare homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 & + & s_2 & + & 2s_3 & = & 0 \\ s_1 & + & 2s_2 & - & s_3 & = & 0 \\ s_1 & + & 3s_2 & + & s_3 & = & 0 \end{array}$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} s_1 & + & s_2 & + & 2s_3 & = & 0 \\ & & s_2 & - & 3s_3 & = & 0 \\ & & 2s_2 & - & s_3 & = & 0 \end{array}$$

Subtraktion des Zweifachen der zweiten Gleichung von der dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} s_1 & + & s_2 & + & 2s_3 & = & 0 \\ & & s_2 & - & 3s_3 & = & 0 \\ & & & & 5s_3 & = & 0 \end{array}$$

Daraus folgt $s_3 = 0$ und weiter $s_2 = 0$ und $s_1 = 0$. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ linear unabhängig und bilden eine Basis von V.

Der Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ ist als Linearkombination der Vekoren $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \in V$ darzustellen.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} s_1 & + & s_2 & + & 2s_3 & = & 1 \\ s_1 & + & 2s_2 & - & s_3 & = & -2 \\ s_1 & + & 3s_2 & + & s_3 & = & 5 \end{array}$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} s_1 & + & s_2 & + & 2s_3 & = & 1 \\ & & s_2 & - & 3s_3 & = & -3 \\ & & 2s_2 & - & s_3 & = & 4 \end{array}$$

Daraus folgt durch Eliminieren $s_1 = -6$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, d.h die Koordinatendarstellung von $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Basis B lautet $[\boldsymbol{v}]_B = (-6, 3, 2)^T$.

b) Um zu überprüfen, ob es sich bei den drei Polynomen um eine Basis von V handelt, muss die lineare Unabhängigkeit von $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ überprüft werden.

$$s_1(t^2 - 2t + 5) + s_2(2t^2 - 3t) + s_3(t + 3) = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} s_1 & + & 2s_2 & & & = & 0 \\ -2s_1 & - & 3s_2 & + & s_3 & = & 0 \\ 5s_1 & & & + & 3s_3 & = & 0 \end{array}$$

Wie zuvor zeigt man, dass $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ die einzige Lösung ist. Daher ist B eine Basis von V. Der Ansatz

$$s_1(t^2 - 2t + 5) + s_2(2t^2 - 3t) + s_3(t + 3) = t^2 + 4t - 3$$

und Koeffizientenvergleich führt auf das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} s_1 & + & 2s_2 & & & = & 1 \\ -2s_1 & - & 3s_2 & + & s_3 & = & 4 \\ 5s_1 & & & + & 3s_3 & = & -3 \end{array}$$

in den Unbekannten s_1, s_2, s_3. Durch Eliminieren erhält man die eindeutige Lösung $s_1 = -3$, $s_2 = 2$ und $s_3 = 4$. Daher gilt die Koordinatendarstellung $[\boldsymbol{v}]_B = (-3, 2, 4)^T$.

1.16 Behauptung: Jeder Körper $(K, +, \cdot)$ kann als Vektorraum über K aufgefasst werden.

Beweis: In der Definition eines Vektorraumes setzten wir $V = K$, d.h. wir fassen die Elemente von K als Vektoren auf. Die Addition von zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$ ist die Addition von Elementen in K. Die Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{x} \in K$ mit einem Skalar $s \in K$ ist die Multiplikation von Elementen in K. K ist nach Voraussetzung ein Körper. Die entsprechenden Körperaxiome implizieren die nachzuweisenden Vektorraumaxiome.

Es gilt $K = \mathcal{L}(1) = \{s\,1 : s \in K\}$. Daher ist die Dimension von K als Vektorraum über sich selbst gleich eins.

1.17 Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Es ist zu überprüfen, ob es sich bei den gegebenen Mengen um Unterräume von V handelt. Im Fall eines Unterraumes sind eine Basis und die Dimension des Unterraumes zu bestimmen.

a) Behauptung: $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ ist Unterraum von V.

Beweis: Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$ und $t\boldsymbol{x} \in W$, da aus $2x_1+x_2+x_3 = 0$ und $2y_1 + y_2 + y_3 = 0$ folgt
$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (2x_1 + x_2 + x_3) + (2y_1 + y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0$ und
$2tx_1 + tx_2 + tx_3 = t(2x_1 + x_2 + x_3) = t0 = 0$.

Zur Bestimmung einer Basis setzen wir $x_1 = s$ und $x_2 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ folgt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -2s - t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden folgende linear unabhängige Vektoren eine Basis von W :

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die Dimension des Unterraumes W ist daher 2.

b) Behauptung: $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$ ist kein Unterraum von V.

Beweis: Es liegt kein Unterraum vor, da $\mathbf{0} \notin W$.

1.18 Wir überprüfen, ob die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $s_1 = -2s_2$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $s_3 = -s_2$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $s_2 = 0$. Wegen $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0)$ sind die Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ l.u. und bilden daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind l.u. Vektoren. Nach dem Austauschsatz von Steinitz können $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ durch Hinzunahme eines (von $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$ linear unabhängigen) Vektors $\boldsymbol{b}_i$ der alten Basis zu einer neuen Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Wir suchen nun alle Vektoren der alten Basis, die von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ linear unabhängig sind.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Wie zuvor folgt $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ l.u. und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $s_1 = -2s_3$, aus der zweiten Gleichung folgt $s_2 = -3s_3$. Die dritte Gleichung ist dann bereits erfüllt. Daher ist $s_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. $s_1 = -2t, s_2 = -3t, s_3 = t, t \in \mathbb{R}$ ist eine Parameterdarstellung der Lösungen des Gleichungssystems. Deshalb sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2$ l.a. und bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Es folgt $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3$ l.u. und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

1.19 Basis von U: In der Gleichung $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ für U setzen wir $x_1 = s$, $x_2 = t$ und $x_3 = r$ mit $s, t, r \in \mathbb{R}$. Dann folgt $x_4 = -t - r$. Daher hat ein Vektor $\boldsymbol{x} \in U$ die Darstellung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ r \\ -t-r \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die drei Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

die U aufspannen, sind l.u. und bilden eine Basis von U.

Basis von W: In den Gleichungen $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 - 2x_4 = 0$ für W setzen wir $x_2 = s$ und $x_4 = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $x_1 = -s$ und $x_3 = 2t$. Daher hat ein Vektor $\boldsymbol{x} \in W$ die Darstellung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die zwei Vektoren

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

die W aufspannen, sind l.u. und bilden eine Basis von W.

Basis von $U \cap W$: Der Unterraum $U \cap W$ wird durch die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

beschrieben. Wir setzen $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt $x_3 = 2t$, $x_2 = -3t$ und $x_1 = 3t$. Daher hat $\boldsymbol{x} \in U \cap W$ die Darstellung

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $U \cap W$.

Basis von $U + W$: Die Summe $U + W$ wird durch die Vereinigung der Basen von U und W aufgespannt. Daher gilt

$$U + W = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \ .$$

Diese fünf Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind natürlich linear abhängig. Jede linear unabhängige Teilmenge der fünf Vektoren, die $U + W$ aufspannt, ist eine Basis von $U + W$. Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sind linear unabhängig, daher untersuchen wir die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1$ auf lineare Unabhängigkeit. Der Ansatz

$$s_1\boldsymbol{u}_1 + s_2\boldsymbol{u}_2 + s_3\boldsymbol{u}_3 + s_4\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} s_1 & & & & & - & s_4 & = & 0 \\ & & s_2 & & & + & s_4 & = & 0 \\ & & & & s_3 & & & = & 0 \\ & - & s_2 & - & s_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $s_3 = 0$, daher folgt aus der vierten Gleichung $s_2 = 0$. Weiters folgt aus der zweiten Gleichung $s_4 = 0$ und aus der ersten Gleichung $s_1 = 0$. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1$ linear unabhängig und bilden eine Basis von $U + W$. Wegen $\dim(U + W) = 4$ gilt natürlich $U + W = \mathbb{R}^4$, daher ist die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$ eine weitere Basis von $U + W$.

Der Dimensionssatz

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

gilt wegen $4 = 3 + 2 - 1$.

1.20

a) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_3$, daher $[\boldsymbol{b}_1]_{E_5} = (0,0,1,0,0)^T$,
$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, daher $[\boldsymbol{b}_2]_{E_5} = (1,1,0,0,0)^T$,
$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_5$, daher $[\boldsymbol{b}_3]_{E_5} = (1,0,0,0,1)^T$.

b) Man sieht unmittelbar (oder durch Nachrechnen), dass die Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ linear unabhängig sind. Um B zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen, braucht man zwei von $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ l.u. Vektoren der kanonischen Basis. Offensichtlich muss einer der neuen Vektoren immer $\boldsymbol{e}_4$ sein, da dieser Vektor in der Darstellung von B nicht vorkommt. Daher kommen die folgenden Möglichkeiten für die neuen Vektoren in Betracht:

i) $\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1$: Aus dem Ansatz

$$s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

folgt $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0$, daher bilden die Vektoren $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^5$.

ii) $\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2$: Mit analogem Ansatz folgt die lineare Unabhängigkeit der $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2\}$, die daher eine Basis des $\mathbb{R}^5$ bilden.

iii) $\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3$: Durch das Vektorenpaar $\{\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3\}$ wird B nicht zu einer Basis ergänzt, da $\boldsymbol{e}_3$ bereits in B vorkommt und daher die Vektoren $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3\}$ linear abhängig sind.

iv) $\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$: Man sieht analog zu i), dass $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^5$ ist.

Kapitel 2

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

2.1

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -12 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 4 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & m^2 & \dots & m^n \end{pmatrix}.$$

2.2

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 3B = \begin{pmatrix} -3 & 15 & -6 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$-2B = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.3 Durch explizites Nachrechnen (am besten in Indexschreibweise) zeigt man, dass die Körperaxiome für K unmittelbar die Vektorraumaxiome für $M_{m,n}(K)$ implizieren. Z.B. 1. Distributivgesetz:

$$(s + t)a_{ij} = sa_{ij} + ta_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

2.4 Es ist zu zeigen ist, dass die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ bilden.

Der Ansatz $s_1B_1 + s_2B_2 + s_3B_3 + s_4B_4 = 0$ ergibt

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

und somit die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} s_1 & 2s_2 + s_3 \\ s_4 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$ und somit die lineare Unabhängigkeit. Die kanonische Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ besteht aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt $\dim M_{2,2} = 4$ und die vier l.u. Matrizen B_i, $i = 1, 2, 3, 4$ bilden ebenfalls eine Basis B.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Der Ansatz $x_1B_1 + \ldots + x_4B_4 = A$ und elementweises Gleichsetzen der linken und der rechten Seite dieser Matrizengleichung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & & & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\ & & & & & & x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & & & = & 5 \end{array}$$

in den Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4. Die Werte für x_1, x_4 und x_3 lassen sich unmittelbar ablesen. Einsetzen von x_3 in die zweite Gleichung ergibt $x_2 = -3$. Daher gilt:

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Die kanonische Basis von $M_{m,n}$ sind die $m \times n$–Matrizen

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n\,,$$

wobei in der $m \times n$–Matrix B_{ij} das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gleich 1 ist und alle anderen Elemente der Matrix 0 sind. Kürzere Schreibweise unter Verwendung des Kroneckersymbols:

$$B_{ij} = (b_{ijkl}) = (\delta_{ik}\delta_{jl}), \quad k = 1, \dots, m \quad l = 1, \dots, n$$

Es ist klar, dass jede Matrix $A \in M_{m,n}$ eindeutig als

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} B_{ij}$$

dargestellt werden kann. Es folgt dim $M_{m,n} = mn$.

2.5 Definiert sind die Matrizenprodukte AB, BC und CA. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}, \; BC = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 33 & 40 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ -18 & -16 & -14 & -12 \end{pmatrix}, \; CA = \begin{pmatrix} 21 & 28 & -1 \\ 61 & 68 & -9 \end{pmatrix}$$

2.6

a) Behauptung: Für eine beliebige $(n \times n)$–Matrix gilt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A^T)$

Beweis: Sei $A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji}) = (a^T_{ij})$. Für die Diagonalelemente gilt $a_{ii} = a^T_{ii}$, das heißt die Diagonalelemente von A und A^T sind gleich, daher ist ihre Summe ist gleich.

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a^T_{ii} = \mathrm{Spur}(A^T)$$