Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller WS 2010

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Test am 10. Jänner 2011

A (*mit Lösung*)

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & t\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ -2\,t\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 4\,x_3 & = & 6\,, \end{array}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A. ($1\frac{1}{2}$P)

b) Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist die Koeffizientenmatrix A singulär und für welche Werte des Parameters ist A regulär? Welche Aussagen lassen sich für diese beiden Fälle hinsichtlich der Lösung des Gleichungssystems treffen? (genaue Begründung!) ($1\frac{1}{2}$P)

c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 1$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

d) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = -5$, sofern eine Lösung existiert. (2P)

LÖSUNG

a) Die Determinante von A ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -t & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2\,t & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2t^2 - 8t + 10.$$

b) Aus $\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 + 4t - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = -5$ und $t_2 = 1$ folgt, dass die Koeffizientenmatrix

- A regulär ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$, d.h. Rang$(A)$ ist 3. Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.
- A singulär ist für $t \in \{-5; 1\}$, d.h. Rang(A) ist kleiner als 3. Das Gleichungssystem ist damit abhängig vom Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix entweder nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar.

c) Für $t = 1$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - 2z_1 \\ z_3 + 2z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

Da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

d) Für $t = -5$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - 2z_1 \\ z_3 - 10z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -5 & -5 \\ 0 & -48 & -24 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1/5\, z_2 \\ -1/24\, z_3 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 - z_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2$ ist, ist das Gleichungssystem lösbar, aber wegen $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$ nicht eindeutig lösbar (1-parametrige Lösungsschar).
Mit z.B. der Wahl $x_2 = s \;\Rightarrow\; x_3 = 1 - 2s \;\Rightarrow\; x_1 = 1 - s$ erhält man als Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

□

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $C([0,1])$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum $U = \mathcal{L}\{1, x^2\}$ und die Funktion

$$f(x) = x^3$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\left\{1\,,\ \frac{\sqrt{5}}{2}\,(-3\,x^2 + 1)\right\}$ eine Orthonormalbasis für U ist. (2P)

b) Wie lautet das Polynom $p(x)$ aus U, das die Funktion $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (3P)

c) Wie groß ist der Fehler $\|f - p\|_2$? (1P)

LÖSUNG

a) Es ist ganz offensichtlich $\{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = 1$ und $b_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}(-3\,x^2+1)$ eine Basis von U, weil sich jedes Polynom aus U als eindeutige Linearkombination der Polynome b_1 und b_2 darstellen lässt. Es gilt also noch zu zeigen, dass die Basispolynome normiert und zueinander orthogonal bezüglich des gegebenen inneren Produktes sind. Mit

$$\begin{aligned}
\langle b_1, b_1\rangle &= \int_0^1 b_1\, b_1\ \mathrm{d}x = \int_0^1 1\ \mathrm{d}x = 1\,,\\
\langle b_2, b_2\rangle &= \int_0^1 b_2\, b_2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{5}{4}\,(-3x^2+1)^2\ \mathrm{d}x = 1 \quad \text{und}\\
\langle b_1, b_2\rangle &= \int_0^1 b_1\, b_2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2}\,(-3x^2+1)\ \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

b) Zum Polynom $p(x)$ gelangt man z.B. mittels Orthogonalprojektion. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\langle f, b_1\rangle &= \int_0^1 f\, b_1\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,,\\
\langle f, b_2\rangle &= \int_0^1 f\, b_2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\frac{\sqrt{5}}{2}\,(-3x^2+1)\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^1 (-3x^5+x^3)\ \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{5}}{8},
\end{aligned}$$

folgt

$$p(x) = \langle f, b_1\rangle\, b_1 + \langle f, b_2\rangle\, b_2 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \Big(-\frac{\sqrt{5}}{8}\Big)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\,(-3x^2+1) = -\frac{1}{16} + \frac{15}{16}\,x^2\,.$$

c) Mit

$$\begin{aligned}
&\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^3)^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\\
\text{und}\quad &\|p\|_2^2 = \langle p, p\rangle = \int_0^1 (p(x))^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(-\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\,x^2\Big)^2\ \mathrm{d}x = \frac{9}{64}\\
\text{oder}\quad &\|p\|_2^2 = \langle p, p\rangle = \langle f, b_1\rangle^2 + \langle f, b_2\rangle^2 = \frac{9}{64}
\end{aligned}$$

ist der Fehler

$$\|f-p\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|p\|_2^2} = \sqrt{\frac{1}{7}-\frac{9}{64}} = \frac{1}{8\sqrt{7}}.$$

$\square$

Aufgabe 3.

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. (1P)

b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. (4P)

c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit der Eigenschaft $A = XJX^{-1}$? (1P)

LÖSUNG

a) Durch Entwickeln der 4×4–Determinante $\det(A - \lambda I)$ z.B nach der 1. Spalte erhält man das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A–\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)^3.$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit $n_2 = 3$ und $1 \leq g_2 \leq n_2 = 3$.

b) Für den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_1 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_4 - z_2 \\ 1/2\, z_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$

$$\mathbf{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\; s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; E(0) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ und z.B. für } s = 1 \text{ der Eigenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_2 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_4 - 2z_1 - z_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$ und $x_2 = t$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(2) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraumes $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 2$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 3$ Hauptvektoren $\mathbf{h}$ geben, die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 I)\mathbf{h} = \mathbf{v}$ sind:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & t \end{array} \right) \xrightarrow{z_4 - 2z_1 - z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2s \end{array} \right).$$

Dieses Gleichungssystem ist allerdings nur lösbar für $s = 0$ und führt z.B. nach Wahl von $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$ auf

$$\mathbf{h} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern } (A - \lambda_2 I)}, \quad t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mit z.B. der Wahl $t = 1$ sowie $\alpha = \beta = 0$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ erhält man in Hinblick auf die Transformationsmatrix X den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und den dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter zu $\mathbf{v}_2$ linear unabhängiger Eigenvektor aus dem Eigenraum $E(2)$ ist zum Beispiel $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 0)^T$.

c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und und eine mögliche Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2010

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Test am 10. Jänner 2011

B *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3\,x_2 & + & t\,x_3 & = & 5 \\ 2\,t\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4 \\ -\,3\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & = & 1\,, \end{array}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A. ($1\frac{1}{2}$P)

b) Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist die Koeffizientenmatrix A singulär und für welche Werte des Parameters ist A regulär? Welche Aussagen lassen sich für diese beiden Fälle hinsichtlich der Lösung des Gleichungssystems treffen? (genaue Begründung!) ($1\frac{1}{2}$P)

c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 1$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

d) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 2$, sofern eine Lösung existiert. (2P)

LÖSUNG

a) Die Determinante von A ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & t \\ 2\,t & -6 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6t^2 - 18t + 12.$$

b) Aus $\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 2$ und $t_2 = 1$ folgt, dass die Koeffizientenmatrix

- ▷ A regulär ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{2; 1\}$, d.h. Rang$(A)$ ist 3. Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.
- ▷ A singulär ist für $t \in \{2; 1\}$, d.h. Rang(A) ist kleiner als 3. Das Gleichungssystem ist damit abhängig vom Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix entweder nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar.

c) Für $t = 1$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{z_2 = z_3 + 3z_1 \\ z_3 = z_2 - 2z_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

d) Für $t = 2$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{z_2 - 4z_1 \\ z_3 + 3z_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -6 & -16 \\ 0 & -6 & 6 & 16 \end{array}\right) \overset{\substack{1/2\, z_2 \\ -1/2\, z_3}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & -8 \end{array}\right) \overset{z_3 - z_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2$ ist, ist das Gleichungssystem lösbar, aber wegen $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$ nicht eindeutig lösbar (1-parametrige Lösungsschar).
Mit z.B. der Wahl $x_3 = s \Rightarrow x_2 = s - \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = -3 + s$ erhält man als Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $C([0,1])$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum $U = \mathcal{L}\{1, x^3\}$ und die Funktion

$$f(x) = x^2$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\left\{1, \frac{\sqrt{7}}{3}(-4\,x^3 + 1)\right\}$ eine Orthonormalbasis für U ist. (2P)

b) Wie lautet das Polynom $p(x)$ aus U, das die Funktion $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (3P)

c) Wie groß ist der Fehler $\|f - p\|_2$? (1P)

LÖSUNG

a) Es ist ganz offensichtlich $\{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = 1$ und $b_2 = \frac{\sqrt{7}}{3}(-4\,x^3 + 1)$ eine Basis von U, weil sich jedes Polynom aus U als eindeutige Linearkombination der Polynome b_1 und b_2 darstellen lässt. Es gilt also noch zu zeigen, dass die Basispolynome normiert und zueinander orthogonal bezüglich des gegebenen inneren Produktes sind. Mit

$$\begin{aligned}
\langle b_1, b_1\rangle &= \int_0^1 b_1\, b_1 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1\,,\\
\langle b_2, b_2\rangle &= \int_0^1 b_2\, b_2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{7}{9}(-4x^3+1)^2 \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{und}\\
\langle b_1, b_2\rangle &= \int_0^1 b_1\, b_2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{7}}{3}(-4x^3+1) \,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

b) Zum Polynom $p(x)$ gelangt man z.B. mittels Orthogonalprojektion. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\langle f, b_1\rangle &= \int_0^1 f\, b_1 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,,\\
\langle f, b_2\rangle &= \int_0^1 f\, b_2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\frac{\sqrt{7}}{3}(-4x^3+1) \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{7}}{3}\int_0^1 (-4x^5+x^2) \,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{7}}{9},
\end{aligned}$$

folgt

$$p(x) = \langle f, b_1\rangle\, b_1 + \langle f, b_2\rangle\, b_2 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{9}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}(-4x^3+1) = \frac{2}{27} + \frac{28}{27}\,x^3\,.$$

c) Mit

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \langle f, f\rangle = \int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\\
\text{und}\quad \|p\|_2^2 &= \langle p, p\rangle = \int_0^1 (p(x))^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{2}{27}+\frac{28}{27}\,x^3\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{16}{81}\\
\text{oder}\quad \|p\|_2^2 &= \langle p, p\rangle = \langle f, b_1\rangle^2 + \langle f, b_2\rangle^2 = \frac{16}{81}
\end{aligned}$$

ist der Fehler

$$\|f-p\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \|p\|_2^2} = \sqrt{\frac{1}{5}-\frac{16}{81}} = \frac{1}{9\sqrt{5}}.$$

□

Aufgabe 3.

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. (1P)

b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. (4P)

c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit der Eigenschaft $A = XJX^{-1}$? (1P)

LÖSUNG

a) Durch Entwickeln der 4×4–Determinante $\det(A - \lambda I)$ z.B nach der 2. Zeile erhält man das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A–\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(1-\lambda)^3.$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ mit $n_2 = 3$ und $1 \le g_2 \le n_2 = 3$.

b) Für den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_1 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_1 = z_4 \\ z_3 = z_3 - z_2 \\ z_4 = z_3 - z_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_1 = s$

$$\mathbf{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; E(0) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ und z.B. für } s = 1 \text{ der Eigenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A–\lambda_2 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_1 = -z_1 + z_3 \\ z_2 \leftrightarrow z_3 \\ z_4 = z_4 - 2z_1 + 2z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_3 = s$ und $x_4 = t$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E(1) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraumes $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 2$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 3$ Hauptvektoren $\mathbf{h}$ geben, die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_2 I)\mathbf{h} = \mathbf{v}$ sind:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 1 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ -2 & 0 & 2 & 0 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} z_1 = -z_1 + z_3 \\ z_2 \leftrightarrow z_3 \\ z_4 = z_4 - 2z_1 + 2z_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right).$$

Dieses Gleichungssystem ist allerdings nur lösbar für $t = 0$ und führt z.B. nach Wahl von $x_3 = \alpha$ und $x_4 = \beta$ auf

$$\mathbf{h} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern } (A-\lambda_2 I)}, \quad s, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mit z.B. der Wahl $s = 1$ sowie $\alpha = \beta = 0$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ erhält man in Hinblick auf die Transformationsmatrix X den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und den dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter zu $\mathbf{v}_2$ linear unabhängiger Eigenvektor aus dem Eigenraum $E(1)$ ist zum Beispiel $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1)^T$.

c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und eine mögliche dazugehörige Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$