Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2011

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

1. Test am 25. November 2011

A *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2\,x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ & - & 3\,x_2 & - & 5\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & 7 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 9\,x_3 & - & x_4 & = & -7 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2P)

b) Was lässt sich aus dem Ergebnis von a) über die Lösbarkeit und gegebenfalls über die Gestalt der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems aussagen (genaue Begründung)? (1P)

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. (2P)

d) Geben Sie eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Bildes von A an. (1P)

LÖSUNG

a) Durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 9 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 - 3z_1 \\ z_4 + 2z_1 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} z_1 = z_3 \\ z_3 = z_3 - 2z_4 \\ z_4 = z_2 + 3z_4 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_4 + 2z_3 \\ z_2 - z_3 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form, woraus Rang(A)= Rang$(A|\mathbf{b}) = 3$ folgt.

b) Wegen Rang$(A) =$ Rang$(A|\mathbf{b}) = r = 3$, ist das Gleichungssystem lösbar, wegen $r = 3 < 4 = n = \dim(\mathbb{R}^4)$ jedoch nicht eindeutig lösbar. Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Die allgemeine Lösung ist eine 1-parametrige $(n - r = 1 = \dim \mathrm{Kern}(A))$ Lösungsschar der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + \mathrm{Kern}(A)$, wobei $\mathbf{x_p}$ eine Partikulärlösung (beliebige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$) ist.

c) Die obige Koeffizientenmatrix liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2\,x_3 & - & x_4 & = & -1\,, \\ & & x_2 & & & + & 4\,x_4 & = & 1\,, \\ & & & & x_3 & - & 2\,x_4 & = & -2\,. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung erhält man nun zum Beispiel mit der Wahl $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$, durch kontinuierliches Zurückeinsetzen in das Gleichungssystem beginnend mit der letzten Gleichung,

$$\left.\begin{array}{lcl} x_4 & = & s \\ x_3 & = & 2\,x_4 - 2 = 2\,s - 2 \\ x_2 & = & -4\,x_4 + 1 = -4\,s + 1 \\ x_1 & = & -2\,x_3 + x_4 - 1 = -3\,s + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_p}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Kern}(A)}, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

d) Das Bild von A ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A, der Rang von A ist 3. Aus der gestaffelten Form der Koeffizientenmatrix sieht man nun, dass z.B. die ersten drei Spalten der Matrix A linear unabhängig sind. Basen von Kern(A) und Bild(A) sind also z.B.

$$\text{Basis }(\mathrm{Bild}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Basis }(\mathrm{Kern}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die Unterräume

$$\begin{aligned} U &:= \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; 2\,x_1 + x_2 = 0\,,\;\; x_2 + x_3 = 0\right\} \qquad \text{und} \\ W &:= \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; 2\,x_1 + x_4 = 0\,,\;\; x_2 - x_4 = 0\right\} \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension der Unterräume U und W. (2P)

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Summe $U{+}W$ der Unterräume U und W. (2P)

c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap W$ der Unterräume U und W. (2P)

LÖSUNG

a) **Basis und Dimension von U**:
Der Unterraum U besteht aus der Menge all jener Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$, die beide Gleichungen aus obiger Definition für U erfüllen.
Mit z.B. der Wahl $x_1 = s$ und $x_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ folgt aus der ersten Gleichung $x_2 = -2\,x_1 = -2s$ und aus der zweiten Gleichung $x_3 = -x_2 = 2s$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2} \quad \Rightarrow \quad \text{Basis}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U) = 2$$

Basis und Dimension von W:
Der Unterraum W besteht aus der Menge all jener Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$, die beide Gleichungen aus obiger Definition für W erfüllen.
Mit z.B. der Wahl $x_3 = s$ und $x_1 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ folgt aus der ersten Gleichung $x_4 = -2\,x_1 = -2t$ und aus der zweiten Gleichung $x_2 = x_4 = -2t$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_2} \quad \Rightarrow \quad \text{Basis}(W) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(W) = 2$$

b) Der Unterraum $U{+}W$ besteht aus der linearen Hülle der Basisvektoren von U und W. Nach elementarer Zeilenumformung der Matrix $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_2 + 2\,z_1 \\ z_3 - 2\,z_1 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_2 = z_3 \\ z_3 = z_4 - z_3 \\ z_4 = z_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sieht man, dass der Rang der Matrix 3 ist und z.B. die Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2$ und $\mathbf{w}_1$ linear unabhängig sind. Es ist also z.B.

$$\text{Basis}(U{+}W) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U{+}W) = 3$$

c) Der Unterraum $U{\cap}W$ ist der Unterraum jener Vektoren, die sowohl in U als auch in W liegen, die also sowohl die Gleichungen die den Unterraum U festlegen, als auch die Gleichungen die den Unterraum W festlegen, erfüllen.
Durch elementare Zeilenumformungen der Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_3 - z_1 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_4 + z_3 \\ z_3 + z_2 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form. Der Rang der Matrix ist 3 und die Dimension des Kerns 1. Mit z.B. der Wahl $x_1 = s$ ($s \in \mathbb{R}$) folgt $x_2 = -2s$, $x_3 = 2s$ und $x_4 = -2s$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist also

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Basis}(U{\cap}W) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U{\cap}W) = 1$$

Der Dimensionssatz $\dim(U{+}W) + \dim(U{\cap}W) = \dim(U) + \dim(W)$ ist erfüllt. $\square$

Aufgabe 3.

Im $\mathbb{R}^3$ sind die kanonische Basis $E_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Weiters ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Basisvektoren des E_3

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = -2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,.$$

definiert.

a) Geben Sie Matrix $[\varphi(E_3)]_{E_3}$ an, die die Abbildung φ bezüglich der Basis E_3 beschreibt. ($\frac{1}{2}$P)

b) Wie lauten die Transformationsmatrizen $T_{E_3 \leftarrow B}$ (Basiswechsel von B auf E_3) und $T_{B \leftarrow E_3}$ (Basiswechsel von E_3 auf B)? (2P)

c) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi(B)]_B$, die die Abbildung φ bezüglich der Basis B beschreibt. (2P)

d) Geben Sie für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $[\mathbf{v}]_{E_3}$ bezüglich der Basis E_3 und die Koordinaten $[\mathbf{v}]_B$ bezüglich der Basis B an. ($\frac{1}{2}$P)

e) Berechnen Sie für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten der Bilder $[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3}$ bezüglich der Basis E_3 und $[\varphi(\mathbf{v})]_B$ bezüglich der Basis B. (1P)

LÖSUNG

a) In den Spalten der Abbildungsmatrix $[\varphi(E_3)]_{E_3}$ stehen die Koordinaten der Bilder der Basis E_3 dargestellt bezüglich der Basis E_3. Es ist also

$$[\varphi(E_3)]_{E_3} = \big([\varphi(e_1)]_{E_3}\,,\, [\varphi(e_2)]_{E_3}\,,\, [\varphi(e_3)]_{E_3}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Spalten einer Transformationsmatrix bestehen aus den Koordinaten der alten Basis dargestellt bezüglich der neuen Basis. Daher besteht die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow B}$ spaltenweise aus den Basisvektoren von B. Zudem gilt $T_{B \leftarrow E_3} = (T_{E_3 \leftarrow B})^{-1}$. Nach Invertieren von $T_{E_3 \leftarrow B}$ ist

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_B$ lässt sich z.B. mit Hilfe der Transformationsmatrizen berechnen mittels

$$\begin{aligned}[\varphi(B)]_B &= T_{B\leftarrow E_3} \cdot [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot T_{E_3\leftarrow B} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

d) Mit $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\,\mathbf{b}_3$ ist

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$[\mathbf{v}]_{E_3} = T_{E_3\leftarrow B} \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

e) Für die Koordinaten der Bilder gilt

▷

$$[\varphi(\mathbf{v})]_B = [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix},$$

oder

$$[\varphi(\mathbf{v})]_B = T_{B\leftarrow E_3} \cdot [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3}.$$

▷

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

oder

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = T_{E_3\leftarrow B} \cdot [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

□

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2011

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

1. Test am 25. November 2011

B *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2\,x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & - & 2\,x_2 & & & - & 8\,x_4 & = & -6 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 8\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 13 \\ -3\,x_1 & + & x_2 & - & 5\,x_3 & + & 5\,x_4 & = & 4 \end{array}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2P)

b) Was lässt sich aus dem Ergebnis von a) über die Lösbarkeit und gegebenfalls über die Gestalt der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems aussagen (genaue Begründung)? (1P)

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. (2P)

d) Geben Sie eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Bildes von A an. (1P)

LÖSUNG

a) Durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -6 \\ 2 & 3 & 8 & 2 & 13 \\ -3 & 1 & -5 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_3 - 2z_1 \\ z_4 + 3z_1 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 = z_4 \\ z_3 = z_3 - 3z_4 \\ z_4 = z_2 + 2z_4 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - z_3 \\ z_4 - 2z_3 \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die erweiterte Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form, woraus Rang(A)= Rang$(A|\mathbf{b}) = 3$ folgt.

b) Wegen Rang$(A) =$ Rang$(A|\mathbf{b}) = r = 3$, ist das Gleichungssystem lösbar, wegen $r = 3 < 4 = n = \dim(\mathbb{R}^4)$ jedoch nicht eindeutig lösbar. Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Die allgemeine Lösung ist eine 1-parametrige ($n - r = 1 = \dim \operatorname{Kern}(A)$) Lösungsschar der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + \operatorname{Kern}(A)$, wobei $\mathbf{x_p}$ eine Partikulärlösung (beliebige Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$) ist.

c) Die obige Koeffizientenmatrix liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2\,x_3 & - & x_4 & = & 0\,, \\ & & x_2 & & & + & 4\,x_4 & = & 3\,, \\ & & & & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 1\,. \end{array}$$

Die allgemeine Lösung erhält man nun zum Beispiel mit der Wahl $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$, durch kontinuierliches Zurückeinsetzen in das Gleichungssystem beginnend mit der letzten Gleichung,

$$\left.\begin{array}{lcl} x_4 &=& s \\ x_3 &=& 2\,x_4 + 1 = 2\,s + 1 \\ x_2 &=& -4\,x_4 + 3 = -4\,s + 3 \\ x_1 &=& -2\,x_3 + x_4 = -3\,s - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_p}} + \underbrace{s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern}(A)}, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

d) Das Bild von A ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A, der Rang von A ist 3. Aus der gestaffelten Form der Koeffizientenmatrix sieht man nun, dass z.B. die ersten drei Spalten der Matrix A linear unabhängig sind. Basen von Kern(A) und Bild(A) sind also z.B.

$$\text{Basis }(\text{Bild}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Basis }(\text{Kern}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die Unterräume

$$U \;:=\; \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + 2\,x_3 = 0\,,\;\; x_1 - x_4 = 0\} \qquad \text{und}$$

$$W \;:=\; \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; 2\,x_3 + x_4 = 0\,,\;\; x_2 + x_4 = 0\}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension der Unterräume U und W. (2P)

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Summe $U+W$ der Unterräume U und W. (2P)

c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap W$ der Unterräume U und W. (2P)

LÖSUNG

a) **Basis und Dimension von U**:
Der Unterraum U besteht aus der Menge all jener Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$, die beide Gleichungen aus obiger Definition für U erfüllen.
Mit z.B. der Wahl $x_2 = s$ und $x_3 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ folgt aus der ersten Gleichung $x_1 = -2\,x_3 = -2t$ und aus der zweiten Gleichung $x_1 = x_4 = -2t$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = s\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2} \quad\Rightarrow\quad \text{Basis}(U) = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}, \quad \dim(U) = 2$$

Basis und Dimension von W:
Der Unterraum W besteht aus der Menge all jener Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$, die beide Gleichungen aus obiger Definition für W erfüllen.
Mit z.B. der Wahl $x_1 = s$ und $x_3 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ folgt aus der ersten Gleichung $x_4 = -2\,x_3 = -2t$ und aus der zweiten Gleichung $x_2 = -x_4 = 2t$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\mathbf{w}_2} \quad\Rightarrow\quad \text{Basis}(W) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}, \quad \dim(W) = 2$$

b) Der Unterraum $U+W$ besteht aus der linearen Hülle der Basisvektoren von U und W.
Nach elementarer Zeilenumformung der Matrix $(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix} \quad \xrightarrow{z_4 + 2\,z_3} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

sieht man, dass der Rang der Matrix 3 ist und z.B. die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ linear unabhängig sind. Es ist also z.B.

$$\text{Basis}(U+W) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 3$$

c) Der Unterraum $U \cap W$ ist der Unterraum jener Vektoren, die sowohl in U als auch in W liegen, die also sowohl die Gleichungen die den Unterraum U festlegen, als auch die Gleichungen die den Unterraum W festlegen, erfüllen.
Durch elementare Zeilenumformungen der Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{z_2 - z_1}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\substack{z_2 = z_4 \\ z_4 = z_2 + z_3}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die Koeffizientenmatrix in gestaffelter Form. Der Rang der Matrix ist 3 und die Dimension des Kerns 1. Mit z.B. der Wahl $x_3 = s$ ($s \in \mathbb{R}$) folgt $x_1 = -2s$, $x_4 = -2s$ und $x_2 = 2s$. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist also

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Basis}(U \cap W) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 1$$

Der Dimensionssatz $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$ ist erfüllt. $\square$

Aufgabe 3.

Im $\mathbb{R}^3$ sind die kanonische Basis $E_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Weiters ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Basisvektoren des E_3

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3\,.$$

definiert.

a) Geben Sie Matrix $[\varphi(E_3)]_{E_3}$ an, die die Abbildung φ bezüglich der Basis E_3 beschreibt. ($\frac{1}{2}$P)

b) Wie lauten die Transformationsmatrizen $T_{E_3 \leftarrow B}$ (Basiswechsel von B auf E_3) und $T_{B \leftarrow E_3}$ (Basiswechsel von E_3 auf B)? (2P)

c) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi(B)]_B$, die die Abbildung φ bezüglich der Basis B beschreibt. (2P)

d) Geben Sie für den Vektor $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $[\mathbf{v}]_{E_3}$ bezüglich der Basis E_3 und die Koordinaten $[\mathbf{v}]_B$ bezüglich der Basis B an. ($\frac{1}{2}$P)

e) Berechnen Sie für den Vektor $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten der Bilder $[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3}$ bezüglich der Basis E_3 und $[\varphi(\mathbf{v})]_B$ bezüglich der Basis B. (1P)

LÖSUNG

a) In den Spalten der Abbildungsmatrix $[\varphi(E_3)]_{E_3}$ stehen die Koordinaten der Bilder der Basis E_3 dargestellt bezüglich der Basis E_3. Es ist also

$$[\varphi(E_3)]_{E_3} = \big([\varphi(e_1)]_{E_3}\,,\,[\varphi(e_2)]_{E_3}\,,\,[\varphi(e_3)]_{E_3}\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Spalten einer Transformationsmatrix bestehen aus den Koordinaten der alten Basis dargestellt bezüglich der neuen Basis. Daher besteht die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow B}$ spaltenweise aus den Basisvektoren von B. Zudem gilt $T_{B \leftarrow E_3} = (T_{E_3 \leftarrow B})^{-1}$. Nach Invertieren von $T_{E_3 \leftarrow B}$ ist

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_B$ lässt sich z.B. mit Hilfe der Transformationsmatrizen berechnen mittels

$$\begin{aligned}[\varphi(B)]_B &= T_{B\leftarrow E_3} \cdot [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot T_{E_3\leftarrow B} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

d) Mit $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ ist

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$[\mathbf{v}]_{E_3} = T_{E_3\leftarrow B} \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) Für die Koordinaten der Bilder gilt

- ▷ $$[\varphi(\mathbf{v})]_B = [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

  oder

  $$[\varphi(\mathbf{v})]_B = T_{B\leftarrow E_3} \cdot [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3}.$$

- ▷ $$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = [\varphi(E_3)]_{E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

  oder

  $$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_3} = T_{E_3\leftarrow B} \cdot [\varphi(B)]_B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

□