Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2011

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Test am 16. Jänner 2012

A *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & t\,x_3 & = & -1 \\ 3\,x_1 & + & (t+1)\,x_2 & + & (t-1)\,x_3 & = & -1 \\ t\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A. (1P)

b) Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist die Koeffizientenmatrix A singulär und für welche Werte des Parameters ist A regulär? Welche Aussagen lassen sich für diese Fälle hinsichtlich der Lösung des Gleichungssystems treffen? (genaue Begründung!) (1P)

c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = -2$, sofern eine Lösung existiert. (2P)

d) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 0$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

e) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 2$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

LÖSUNG

a) Die Determinante von A ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 3 & t+1 & t-1 \\ t & 2 & 1 \end{vmatrix} = -t^3 + 4\,t = -t(t^2-4) = -t(t-2)(t+2).$$

b) Aus $\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; -t(t-2)(t+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = -2,\, t_2 = 0$ und $t_3 = 2$ folgt, dass die Koeffizientenmatrix

- ▷ A regulär ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, d.h. Rang$(A)$ ist 3. Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.
- ▷ A singulär ist für $t \in \{-2; 0; 2\}$, d.h. Rang(A) ist kleiner als 3. Das Gleichungssystem ist damit abhängig vom Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix entweder nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar.

c) Für $t = -2$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 + 2z_1]{z_2 - 3z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 + z_2]{z_2 = z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da Rang(A) = Rang$(A|b) = 2$ ist, ist das Gleichungssystem lösbar, aber wegen $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$ nicht eindeutig lösbar (1-parametrige Lösungsschar).
Mit z.B. der Wahl $x_3 = 4s \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{1}{2} + 3s \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{2} + 5s$ erhält man als Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

d) Für $t = 0$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - 3z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 + z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

e) Für $t = 2$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 - 2z_1]{z_2 - 3z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{5z_3 - 3z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Da $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

$\square$

Aufgabe 2.

Im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem inneren Produkt

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum U der Polynome vom Grad ≤ 1 und das Polynom

$$f(x) = x^2$$

gegeben.

a) Bestimmen sie für das Polynom $v_1(x) = 2x + 1 \in U$ ein Polynom $v_2(x) \in U$ der Form $v_2(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, so dass $v_1(x)$ orthogonal zu $v_2(x)$ bezüglich des gegebenen inneren Produktes in U ist. (3P)

b) Normieren Sie die Polynome $v_1(x)$ und $v_2(x)$ aus Punkt a), um so eine Orthonormalbasis des Unterraumes U zu erhalten. (1P)

Hinweis: Sollten Sie den Punkt a) nicht gelöst haben, dann rechnen Sie hier mit den Polynomen $v_1(x) = 2x + 1$ und $v_2(x) = 12x - 7$.

c) Wie lautet das Polynom $p(x)$ aus U, welches das Polynom $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (2P)

LÖSUNG

a) Zwei Polynome sind genau dann zueinander orthogonal $(v_1 \perp v_2)$, wenn das innere Produkt der beiden gleich 0 ist. Mit

$$\langle v_1, v_2\rangle = \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)(ax+b)\, \mathrm{d}x = \frac{7}{6}\, a + 2b = 0\,,$$

liefert z.B. durch Wahl von $a = 12$ und $b = -7$ das Polynom $v_2(x) = 12x - 7$ das Gewünschte.

b) Da v_1 und v_2 schon zueinander orthogonal sind und die Dimension des Unterraumes U gleich 2 ist, erhält man mit Hilfe der inneren Produkte

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_1\rangle &= \int_0^1 (v_1(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)^2\, \mathrm{d}x = \frac{13}{3}\,,\\
\langle v_2, v_2\rangle &= \int_0^1 (v_2(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (12x-7)^2\, \mathrm{d}x = 13,
\end{aligned}$$

für U eine Orthonormalbasis $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ aus

$$\hat{v}_1(x) = \frac{v_1(x)}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} = \sqrt{\frac{3}{13}}\,(2x+1) \quad \text{und} \quad \hat{v}_2(x) = \frac{v_2(x)}{\sqrt{\langle v_2, v_2\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\,(12x-7)$$

c) Zum Polynom $p(x)$ gelangt man nun z.B. mittels Orthogonalprojektion auf den Unterraum U. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}\langle f, \hat{v}_1\rangle &= \int_0^1 f\,\hat{v}_1\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{13}}\int_0^1 (2x+1)\,x^2\ \ \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{13}}\,,\\ \langle f, \hat{v}_2\rangle &= \int_0^1 f\,\hat{v}_2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{13}}\int_0^1 (12x-7)\,x^2\ \ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{13}}\,,\end{aligned}$$

folgt

$$p(x) = \langle f, \hat{v}_1\rangle\ \hat{v}_1 + \langle f, \hat{v}_2\rangle\ \hat{v}_2 = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{\frac{3}{13}}(2x+1) + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{13}}\,\frac{1}{\sqrt{13}}(12x-7) = x - \frac{1}{6}\,.$$

$\square$

Aufgabe 3.

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. ($1\frac{1}{2}$P)

b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ dazugehörigen Eigenvektoren und Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. ($3\frac{1}{2}$P)

c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit der Eigenschaft $A = XJX^{-1}$? (1P)

LÖSUNG

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ erhält man aus

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & -2-\lambda & -3 \\ 4 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda+2)^2(\lambda-1).$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = 1$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit $n_2 = 2$ und $1 \leq g_2 \leq n_2 = 2$.

b) Für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_1 = z_2/(-3) \\ z_2 = z_3 \\ z_3 = z_3 + z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 - z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_3 = s$

$$\mathbf{v} = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ E(1) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ und für } s = 1 \text{ der Eigenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-z_1 \\ z_2/(-3) \\ z_3 + 4z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_1 = z_2 \\ z_2 = z_3/(-3) \\ z_3 = z_1 - z_2 + 1/3\, z_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_3 = s$

$$\mathbf{v} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ E(1) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraumes $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 1$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 2$ Hauptvektoren $\mathbf{h}$ geben, die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 I)\mathbf{h} = \mathbf{v}$ sind:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & -s \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & s \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3\,s \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nach Wahl von z.B. $x_3 = \alpha$ folgt $x_1 = -\alpha$ und $x_2 = s$ und

$$\mathbf{h} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern } (A - \lambda_2 I)}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mit z.B. der Wahl $s = 1$ sowie $\alpha = 0$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ erhält man in Hinblick auf die Transformationsmatrix X den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und den dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und und eine mögliche Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2011

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

2. Test am 16. Jänner 2012

B *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ und den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & (t-1)\,x_2 & + & (1-t)\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & t\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ t\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A. (1P)

b) Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist die Koeffizientenmatrix A singulär und für welche Werte des Parameters ist A regulär? Welche Aussagen lassen sich für diese Fälle hinsichtlich der Lösung des Gleichungssystems treffen? (genaue Begründung!) (1P)

c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = -2$, sofern eine Lösung existiert. (2P)

d) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 0$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

e) Lösen Sie das Gleichungssystem für $t = 2$, sofern eine Lösung existiert. (1P)

LÖSUNG

a) Die Determinante von A ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1-t \\ 2 & t & 1 \\ t & 2 & -1 \end{vmatrix} = t^3 - 4\,t = t(t^2-4) = t(t-2)(t+2).$$

b) Aus $\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-2)(t+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = -2,\ t_2 = 0$ und $t_3 = 2$ folgt, dass die Koeffizientenmatrix

- ▷ A regulär ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, d.h. Rang$(A)$ ist 3. Das Gleichungssystem ist damit eindeutig lösbar.
- ▷ A singulär ist für $t \in \{-2; 0; 2\}$, d.h. Rang(A) ist kleiner als 3. Das Gleichungssystem ist damit abhängig vom Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix entweder nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar.

c) Für $t = -2$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 + 2z_1]{z_2 - 2z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 2$ ist, ist das Gleichungssystem lösbar, aber wegen $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$ nicht eindeutig lösbar (1-parametrige Lösungsschar).
Mit z.B. der Wahl $x_3 = 4s \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{1}{2} + 5s \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{2} + 3s$ erhält man als Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

d) Für $t = 0$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - 2z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_3 - z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Da $\operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

e) Für $t = 2$ führt elementare Zeilenumformung auf

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_2 - 2z_1 \\ z_3 - 2z_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{z_2 = z_3 \\ z_3 = z_2 - 3z_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Da $\operatorname{Rang}(A) \neq \operatorname{Rang}(A|b)$ ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

$\square$

Aufgabe 2.

Im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem inneren Produkt

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x$$

ist der Unterraum U der Polynome vom Grad ≤ 1 und das Polynom

$$f(x) = x^2$$

gegeben.

a) Bestimmen sie für das Polynom $v_1(x) = 3x - 5 \in U$ ein Polynom $v_2(x) \in U$ der Form $v_2(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, so dass $v_1(x)$ orthogonal zu $v_2(x)$ bezüglich des gegebenen inneren Produktes in U ist. (3P)

b) Normieren Sie die Polynome $v_1(x)$ und $v_2(x)$ aus Punkt a), um so eine Orthonormalbasis des Unterraumes U zu erhalten. (1P)

   Hinweis: Sollten Sie den Punkt a) nicht gelöst haben, dann rechnen Sie hier mit den Polynomen $v_1(x) = 3x - 5$ und $v_2(x) = 7x - 3$.

c) Wie lautet das Polynom $p(x)$ aus U, welches das Polynom $f(x)$ in U bezüglich der euklidischen Norm bestmöglichst approximiert? (2P)

LÖSUNG

a) Zwei Polynome sind genau dann zueinander orthogonal ($v_1 \perp v_2$), wenn das innere Produkt der beiden gleich 0 ist. Mit

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (3x-5)(ax+b)\, \mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b = 0\,,$$

liefert z.B. durch Wahl von $a = 7$ und $b = -3$ das Polynom $v_2(x) = 7x - 3$ das Gewünschte.

b) Da v_1 und v_2 schon zueinander orthogonal sind und die Dimension des Unterraumes U gleich 2 ist, erhält man mit Hilfe der inneren Produkte

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_0^1 (v_1(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (3x-5)^2\, \mathrm{d}x = 13\,,$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_0^1 (v_2(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (7x-3)^2\, \mathrm{d}x = \frac{13}{3},$$

für U eine Orthonormalbasis $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$ aus

$$\hat{v}_1(x) = \frac{v_1(x)}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\,(3x-5) \quad \text{und} \quad \hat{v}_2(x) = \frac{v_2(x)}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \sqrt{\frac{3}{13}}\,(7x-3)$$

c) Zum Polynom $p(x)$ gelangt man nun z.B. mittels Orthogonalprojektion auf den Unterraum U. Mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\langle f, \hat{v}_1 \rangle &= \int_0^1 f\, \hat{v}_1 \;\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{13}} \int_0^1 (3x-5)\, x^2 \;\mathrm{d}x = -\frac{11}{12}\, \frac{1}{\sqrt{13}}\,, \\
\langle f, \hat{v}_2 \rangle &= \int_0^1 f\, \hat{v}_2 \;\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{13}} \int_0^1 (7x-3)\, x^2 \;\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{13}}\,,
\end{aligned}$$

folgt

$$p(x) = \langle f, \hat{v}_1 \rangle\, \hat{v}_1 + \langle f, \hat{v}_2 \rangle\, \hat{v}_2 = -\frac{11}{12}\, \frac{1}{\sqrt{13}}\, \frac{1}{\sqrt{13}} (3x-5) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{13}} \sqrt{\frac{3}{13}} (7x-3) = x - \frac{1}{6}\,.$$

$\square$

Aufgabe 3.

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A. $(1\frac{1}{2}\text{P})$

b) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ dazugehörigen Eigenvektoren und Hauptvektoren, und geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. $(3\frac{1}{2}\text{P})$

c) Wie lautet die Jordan'sche Normalform J und die Transformationsmatrix X mit der Eigenschaft $A = XJX^{-1}$? (1P)

LÖSUNG

a) Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ erhält man aus

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -4 & -2-\lambda & -1 \\ 4 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = -(\lambda-3)^2(\lambda+1).$$

Aus $p(\lambda) = 0$ folgt $\lambda_1 = -1$ mit $n_1 = g_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ mit $n_2 = 2$ und $1 \le g_2 \le n_2 = 2$.

b) Für den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_1 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_2+z_1 \\ z_3-z_1}]{} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_1 = z_1 - z_3/4 \\ z_2 = z_3/4}]{} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_3 = s$

$$\mathbf{v} = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; E(1) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ und für } s = 1 \text{ der Eigenvektor } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 3$ folgt durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_2 I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{z_1 = z_3 \\ z_2 = z_1 \\ z_3 = z_3 + z_2}]{} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und z.B. durch die Wahl $x_3 = s$

$$\mathbf{v} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; E(1) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 entspricht der Dimension des Eigenraumes $E(\lambda_2)$ und ist daher $g_2 = 1$. Es muss also wegen der arithmetischen Vielfachheit $n_2 = 2$ Hauptvektoren $\mathbf{h}$ geben, die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $(A-\lambda_2 I)\mathbf{h}=\mathbf{v}$ sind:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & s \\ -4 & -5 & -1 & -s \\ 4 & 5 & 1 & s \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 5 & 1 & s \\ 0 & 1 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nach Wahl von z.B. $x_3 = \alpha$ folgt $x_2 = s - \alpha$ und $x_1 = -s + \alpha$ und

$$\mathbf{h} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern } (A-\lambda_2 I)}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mit z.B. der Wahl $s = 1$ sowie $\alpha = 0$ und anschließendem Einsetzen in $\mathbf{v}$ erhält man in Hinblick auf die Transformationsmatrix X den Hauptvektor

$$\mathbf{h}_{21} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und den dazugehörigen Eigenvektor} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die bis auf die Reihenfolge der einzelnen Jordan-Blöcke eindeutige Jordan'sche Normalformal J und und eine mögliche Transformationsmatrix X mit $A = XJX^{-1}$ sind nun

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$