Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2012

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1 (FR, 23.11.2012) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Gleichungssystem (mit $s \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{|ccccccc|} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & s\,x_2 & + & (s+1)\,x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & s\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) (i) Berechnen Sie, abhängig vom Wert von s, den Rang der Koeffizentenmatrix des obigen Gleichungssystems A und der erweiterten Matrix. *a): 3 P.*

(ii) Für welche Werte von s existiert keine, eine oder mehrere Lösungen (**mit Begründung!**)?

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & s & s+1 & 1 \\ 1 & 2 & s & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & s-2 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{ll} s=2: & \mathbf{rk}(A)=2,\ \mathbf{rk}(A|\boldsymbol{b})=2 \\ s=3: & \mathbf{rk}(A)=2,\ \mathbf{rk}(A|\boldsymbol{b})=3 \\ \text{sonst:} & \mathbf{rk}(A)=\mathbf{rk}(A|\boldsymbol{b})=3 \end{array}$

(ii) $s=2$: mehrere Lï¿$\frac{1}{2}$sungen da $\mathbf{rk}(A)=\mathbf{rk}(A|\boldsymbol{b})<\mathbf{dim}(A)$
$s=3$: unlösbar da $\mathbf{rk}(A)<\mathbf{rk}(A|\boldsymbol{b})$
sonst: eindeutig lösbar da $\mathbf{rk}(A)=\mathbf{dim}(A)$

b) Beschränken Sie sich im Folgenden auf jene Wertebereiche von s für welche das Gleichungssystem lösbar ist. *b): 2 P.*

(i) Geben Sie, abhängig von s, eine Basis B des Kerns von A an.

(ii) Welche Dimension hat der Kern von A abhängig von s?

$s \notin \{2,3\}$: eindeutig lï¿$\frac{1}{2}$sbar $\rightarrow B=\emptyset$, $\mathbf{dim}(B)=0$

$s=2$: $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B=\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\mathbf{dim}(B)=1$

c) Geben Sie die allgemeinste Lösung für jene Werte von s an für die *c): 1 P.+ 1 Zusatz-P.*

(i) eine Schar von Lösungen existiert. *1 P.*

(ii) genau eine Lösung existiert. *1 Zusatz-P.*

$s=2$: $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\mathbf{ker}(A)$, $\quad s \notin \{2,3\}$: $\boldsymbol{x}=\frac{1}{s-3}\begin{pmatrix} s-4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Basis: $\boxed{C = \{\boldsymbol{c}_1 = (1,2,1)^T, \boldsymbol{c}_2 = (2,5,3)^T, \boldsymbol{c}_3 = (4,6,9)^T\}}$

  und die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch: $\boxed{\varphi(\boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{e}_1,\ \varphi(\boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \varphi(\boldsymbol{c}_3) = \boldsymbol{e}_2}$

a) (i) Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(C)]_{E_2}$ an. *a): 1 P.*

(ii) Geben Sie die Matrixdarstellung der Basistransformation $T_{E_3 \leftarrow C}$ an.

$$\text{(i)}\quad [\varphi(C)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad T_{E_3 \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow E_3}$. *b): 5 P.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad T_{C \leftarrow E_3} = T^{-1}_{E_3 \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(E_3)]_{E_2}$. *c): 1 Zusatz-P.*

$$[\varphi(E_3)]_{E_2} = [\varphi(C)]_{E_2} T_{C \leftarrow E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ beschrieben durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (i) Untersuchen Sie ob die Abbildung A injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(ii) Geben Sie auch die Dimension des Kerns der Abbildung A an. *a): 4.5 P.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \quad \mathbf{rk}(A) = 4 < 5 = \mathbf{dim}(\mathbb{R}^5)$$

(i) Daher ist die Abbildung weder injektiv noch surjektiv.

(ii) $\mathbf{dim}(\mathbf{ker}(A)) = \mathbf{dim}(\mathbb{R}^5) - \mathbf{rk}(A) = 1$

b) (i) Welche Dimension hat das Bild der Abbildung A? *b): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie auch eine Basis des Bildes an.

(i) $\mathbf{dim}(\mathbf{im}(A)) = \mathbf{rk}(A) = 4$

(ii) Eine Basis des Bildes ist durch die ersten vier Spaltenvektoren der Matrix A gegeben welche offensichtlich linear unabhängig sind.

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

WS 2010

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH

1. Test am 26. November 2010

A

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *Unterlagen: eigenes Vorlesungsskriptum Lineare Algebra ist gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.

Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 3\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & 2 \\ 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4\,x_1 & + & 8\,x_2 & - & 8\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2P)

b) Was lässt sich aus dem Ergebnis von a) über die Lösbarkeit und gegebenfalls über die Gestalt der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems aussagen (genaue Begründung)? (1P)

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. (2P)

d) Geben Sie eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Bildes von A an. (1P)

Aufgabe 2.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die Unterräume

$$\begin{aligned} U &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\,, \quad x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0\right\} \qquad \text{und} \\ W &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 3\,x_1 + 2\,x_4 = 0\,, \quad x_2 + 2\,x_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension der Unterräume U und W. (2P)

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Summe $U+W$ der Unterräume U und W. (2P)

c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap W$ der Unterräume U und W. (2P)

Aufgabe 3.

Im $\mathbb{R}^3$ sind die kanonische Basis $E_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und die Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Weiters ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben, die durch ihre Matrixdarstellung

$$[\varphi(E_3)]_{E_3} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis E_3 repräsentiert wird.

a) Wie lauten die Transformationsmatrizen $T_{E_3 \leftarrow B}$ (Basiswechsel von B auf E_3) und $T_{B \leftarrow E_3}$ (Basiswechsel von E_3 auf B)? (2P)

b) Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi(B)]_B$, die die Abbildung φ bezüglich der Basis B beschreibt. (2P)

c) Geben Sie für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\,\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten $[\mathbf{v}]_{E_3}$ bezüglich der Basis E_3 und die Koordinaten $[\mathbf{v}]_B$ bezüglich der Basis B an. (1P)

d) Berechnen Sie für den Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\,\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten des Bildes $[\varphi(\mathbf{v})]_B$ bezüglich der Basis B. (1P)