Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2013

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1, Gruppe 1 (FR, 22.11.2013)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1	2	3	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Gleichungssystem (mit $s \in \mathbb{R}$), $A\boldsymbol{x} = b, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m = n = 3$:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} x_1 & + & s\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & (s+1)\,x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & s\,x_2 & + & s\,x_3 & = & 4 \end{array}}$$

a) (i) Berechnen Sie, abhängig vom Wert von s, den Rang der Koeffizentenmatrix des obigen Gleichungssystems A und der erweiterten Matrix. *a): 3 P.*

(ii) Für welche Werte von s existiert keine, eine oder mehrere Lösungen (**mit Begründung!**)?

b) Beschränken Sie sich im Folgenden auf jene Wertebereiche von s für welche das Gleichungssystem lösbar ist. *b): 2 P.*

(i) Geben Sie, abhängig von s, eine Basis B des Kerns von A an.

(ii) Welche Dimension hat der Kern von A abhängig von s?

c) Geben Sie die allgemeinste Lösung für jene Werte von s an für die *c): 1 P.+ 1 Zusatz-P.*

(i) eine Schar von Lösungen existiert. *1 P.*

(ii) genau eine Lösung existiert. *1 Zusatz-P.*

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Basis: $\boxed{B = \{\boldsymbol{b}_1 = (2,0,1)^T, \boldsymbol{b}_2 = (0,2,-1)^T, \boldsymbol{b}_3 = (1,3,2)^T\}}$

  und die lineare Abbildung $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch:
  $\boxed{\varphi(\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\ \varphi(\boldsymbol{b}_2) = 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,\ \varphi(\boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3}$

a) (i) Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(B)]_{E_3}$ an. *a): 1 P.*

(ii) Geben Sie die Matrixdarstellung der Basistransformation $T_{E_3 \leftarrow B}$ an.

b) Ist $T_{E_3 \leftarrow B}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls möglich, berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_3}$. *b): 5 P.*

c) Berechnen Sie $[\varphi(x)]_B$ mit $x = (1,1,1)^T$, wobei $[x]_{E_3} = x$ gilt. *c): 1 Zusatz-P.*

- **Aufgabe 3.** Es seien U und W die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$: $\boxed{U = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 0\}}$
$\boxed{W = \{\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_3\}}$

a) (i) Berechnen Sie die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und U+W. *a): 5 P.*

(ii) Überprüfen Sie anhand des Dimensionssatzes für Unterräume Ihre Ergebnisse.

b) Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben durch die Matrix:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Welche Dimension hat das Bild der Abbildung A ? Geben Sie auch eine Basis des Bildes an. *a): 1 P.*

Lineare Alg. & TPH

1. Test am 22.11.2013

Gruppe 1. Lösungen

1.a)(i)(ii) $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n=m=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & s & 4 & 4 \\ 1 & 3 & s+1 & 3 \\ 1 & s & s & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & s & 4 & 4 \\ 0 & 3-s & s-3 & -1 \\ 0 & 0 & s-4 & 0 \end{array}\right)$$

1. Fall $s \neq 3$ und $s \neq 4$: Rang(A) $= 3 =$ Rang(A:b) $= n$ $\exists!$ Lösung

2. Fall $s=4$: Rang(A) $= 2 =$ Rang(A:b) $< n$ $\exists \infty$ Lösungen

3. Fall $s=3$: Rang(A) $= 2 <$ Rang(A:b) $= 3$ $\nexists$ Lösungen

b) 1. Fall $s \neq 3$ und $s \neq 4$: Rang(A) $= n \Rightarrow$ Kern(A) $= \{0\}$.

(i)(ii) Dim Kern (A) $= 0$, Basis $= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Fall $s=4$:

$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 := s,$

$x_2 = x_3 = s$, $x_1 = -4x_2 - 4x_3 = -8s \Rightarrow$

Kern (A) $= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, Dim Kern (A) $= 1$.

c) (i) $s=4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 := s,$

$x_2 = -1 + x_3 = -1 + s$, $x_1 = 4 - 4x_2 - 4x_3 = \underbrace{4+4-4s-4s}_{= 8-8s}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Kern(A)}$

(ii) $s \neq 3$ und $s \neq 4 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & s & 4 & 4 \\ 0 & 3-s & s-3 & -1 \\ 0 & 0 & s-4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 0, x_2 = -\frac{1}{3-s},$

$x_1 = 4 - s x_2 = 4 + \frac{s}{3-s} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3-s}\begin{pmatrix} s \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2a (i) $[\varphi(B)]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $T_{E_3 \leftarrow B}$ ist als Transformationsmatrix zum Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$ regulär und damit bijektiv. Wir invertieren $T_{E_3 \leftarrow B}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}}$$

c) $[\varphi(x)]_B = T_{B \leftarrow E_3} [\varphi(x)]_{E_3} = T_{B \leftarrow E_3} [\varphi(B)]_{E_3} [x]_B$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [x]_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$[\varphi(x)]_B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} {[x]_{E_3}} \arrow[d, "T_{B \leftarrow E_3}"] & {[\varphi(x)]_B} \\ {[x]_B} & {[\varphi(x)]_{E_3}} \arrow[u, "T_{B \leftarrow E_3}"'] \\ B \arrow[r, "{[\varphi(B)]_{E_3}}"'] & E_3 \end{tikzcd}$$

__Bemerkung:__ $[x]_B$ kann man auch aus (*) berechnen:

(*) $[x]_B = T_{B \leftarrow E_3} [x]_{E_3} =$

$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3a)(i) $U: x_1+x_2+x_3=0 \Leftrightarrow x_3=-x_1-x_2 \Rightarrow$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \text{Dim } U = 2$$

$W: x_1 = 2x_3 \Rightarrow$

$$x=\begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{Dim } W = 2$$

$x \in U \cap W \Leftrightarrow x \in U$ und $x \in W \Leftrightarrow$ $x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow s = 2\beta,\ t = \alpha \Rightarrow -s-t = -2\beta-\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = -3\beta \Leftrightarrow$

$$x \in U \cap W \Leftrightarrow x = -3\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$\text{Dim } U \cap W = 1$

$x \in U + W \Leftrightarrow x = u + w,\ u \in U,\ w \in W \Leftrightarrow$

$x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ lin. abh. sind überprüfen wir ob die ersten 3 Vektoren lin. unabh. sind. Also, $s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$s = 0,\ t+\alpha = 0,\ -s-t = 0 \Leftrightarrow \alpha = s = t = 0$. Damit

$$U + W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \text{Dim } U+W = 3;\ U+W = \mathbb{R}^3.$$

Damit haben wir

(ii) $\text{Dim } U+W = \text{Dim } U + \text{Dim } W - \text{Dim } U \cap W \Leftrightarrow$

$3 = 2+2-1$ ✓

b) (i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = 3$$

$\Rightarrow \text{Dim } \mathcal{B}(A) = 3$ und $\mathcal{B}(A) = \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}(A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2013

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1, Gruppe 2 (FR, 22.11.2013)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1	*2*	*3*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Basis: $\boxed{B = \{\boldsymbol{b}_1 = (6,2,4)^T, \boldsymbol{b}_2 = (2,0,2)^T, \boldsymbol{b}_3 = (1,1,3)^T\}}$

  und die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch:

  $$\boxed{\varphi(\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \varphi(\boldsymbol{b}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3,\ \varphi(\boldsymbol{b}_3) = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}$$

a) (i) Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(B)]_{E_3}$ an. *a): 1 P.*

(ii) Geben Sie die Matrixdarstellung der Basistransformation $T_{E_3 \leftarrow B}$ an.

b) Ist $T_{E_3 \leftarrow B}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls möglich, berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_3}$. *b): 5 P.*

c) Berechnen Sie $[\varphi(x)]_B$ mit $x = (1,1,1)^T$, wobei $[x]_{E_3} = x$ gilt. *c): 1 Zusatz-P.*

• **Aufgabe 2.** Gegeben sei das Gleichungssystem (mit $s \in \mathbb{R}$), $A\boldsymbol{x} = b, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m = n = 3$:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & (s+1)\,x_3 & = & 5 \\ 2\,x_1 & + & s\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & 6 \\ 2\,x_1 & + & s\,x_2 & + & s\,x_3 & = & 6 \end{array}}$$

a) (i) Berechnen Sie, abhängig vom Wert von s, den Rang der Koeffizentenmatrix des obigen Gleichungssystems A und der erweiterten Matrix. *a): 3 P.*

(ii) Für welche Werte von s existiert keine, eine oder mehrere Lösungen (**mit Begründung!**)?

b) Beschränken Sie sich im Folgenden auf jene Wertebereiche von s für welche das Gleichungssystem lösbar ist. *b): 2 P.*

(i) Geben Sie, abhängig von s, eine Basis B des Kerns von A an.

(ii) Welche Dimension hat der Kern von A abhängig von s?

c) Geben Sie die allgemeinste Lösung für jene Werte von s an für die *c): 1 P.+ 1 Zusatz-P.*

(i) eine Schar von Lösungen existiert. *1 P.*

(ii) genau eine Lösung existiert. *1 Zusatz-P.*

- **Aufgabe 3.** Es seien U und W die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$: $\boxed{U = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0\}}$
$\boxed{W = \{\boldsymbol{x}_2 = 3\boldsymbol{x}_3\}}$

a) (i) Berechnen Sie die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und U+W. *a): 5 P.*

(ii) Überprüfen Sie anhand des Dimensionssatzes für Unterräume Ihre Ergebnisse.

b) Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Welche Dimension hat das Bild der Abbildung A ? Geben Sie auch eine Basis des Bildes an. *a): 1 P.*

Gruppe 2. Lösungen

1.a)(i)
$$[\varphi(B)]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\underset{E_3 \leftarrow B}{T} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $T_{E_3 \leftarrow B}$ ist als Transformationsmatrix zum Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$ regulär und damit bijektiv. Wir invertieren $T_{E_3 \leftarrow B}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$[\varphi(x)]_B = T_{B \leftarrow E_3}[\varphi(x)]_{E_3} = T_{B \leftarrow E_3}[\varphi(B)]_{E_3}[x]_B$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow [x]_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[\varphi(x)]_B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \\
{[x]_{E_3}} \arrow[d, "T_{B \leftarrow E_3}"] & {[\varphi(x)]_B} \\
{[x]_B} \arrow[r, "{[\varphi(B)]_{E_3}}"'] & {[\varphi(x)]_{E_3}} \arrow[u, "T_{B \leftarrow E_3}"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung:

$[x]_B$ kann man auch aus (*) berechnen:

$$(*)\ [x]_B = T_{B \leftarrow E_3}[x]_{E_3} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2a)(i) (ii) $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n=m=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & s+1 & 5 \\ 2 & s & 6 & 6 \\ 2 & s & s & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & s+1 & 5 \\ 0 & s-5 & 5-s & 1 \\ 0 & s-5 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & s+1 & 5 \\ 0 & s-5 & 5-s & 1 \\ 0 & 0 & s-6 & 0 \end{array}\right)$$

1. Fall $s \neq 5, s \neq 6$: $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A:b) = n$ $\exists!$ Lösung
2. Fall $s = 6$: $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A:b) < n$ $\exists \infty$ Lösungen
3. Fall $s = 5$: $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A:b) = 3$ $\nexists$ Lösung

b) 1. Fall $s \neq 5, s \neq 6$: $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \text{Kern}(A) = \{\phi\}$

$\text{Dim Kern}(A) = 0$, Basis $= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Fall $s = 6$: $Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$x_3 := s$, $x_2 = x_3 = s$, $2x_1 = -5x_2 - 7x_3 = -12s \Rightarrow x_1 = -6s$

$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\text{Dim Kern}(A) = 1$.

c)(i) $s = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 := s,$

$x_2 = 1 + x_3 = 1 + s$, $2x_1 = 5 - 5x_2 - 7x_3 = \underbrace{5 - 5 - 5s - 7s}_{= -12s}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Kern}(A)$

(ii) $s \neq 5$ und $s \neq 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & s+1 \\ 0 & s-5 & 5-s \\ 0 & 0 & s-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_3 = 0$, $x_2 = \frac{1}{s-5}$, $2x_1 = 5 - 5x_2 = 5 - \frac{5}{s-5}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s-5}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3a)(i) $U: x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \Rightarrow$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Dim} U = 2$$

$W: x_2 = 3x_3 \Rightarrow$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Dim} W = 2$$

$x \in U \cap W \Leftrightarrow x \in U$ und $x \in W \Leftrightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow s = \alpha,\ 3t = \beta \Rightarrow t = \alpha + \beta = s + 3t \Rightarrow s = -2t \Leftrightarrow$

$x \in U \cap W \Leftrightarrow x = -2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{Dim} U \cap W = 1$

$x \in U + W \Leftrightarrow x = u + w,\ u \in U,\ w \in W \Leftrightarrow$

$x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ lin. abh. sind überprüfen wir ob die ersten 3 Vektoren lin. unabh. sind. Also $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha + s = 0,\ \beta = 0,\ \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = s = 0$. Damit

$U + W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\operatorname{Dim} U + W = 3$; $U + W = \mathbb{R}^3$.

Damit haben wir

(ii) $\operatorname{Dim} U + W = \operatorname{Dim} U + \operatorname{Dim} W - \operatorname{Dim} U \cap W \Leftrightarrow$

$3 = 2 + 2 - 1$ ✓

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = 3 \Leftrightarrow \operatorname{Dim} \mathcal{B}(A) = 3$ und $\mathcal{B}(A) = \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}(A) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2013

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1, Gruppe 3 (FR, 22.11.2013)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Es seien U und W die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$: $\boxed{U = \{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0\}}$

$\boxed{W = \{\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_2\}}$

a) (i) Berechnen Sie die Dimensionen von U, W, $U \cap W$ und U+W. *a): 5 P.*

(ii) Überprüfen Sie anhand des Dimensionssatzes für Unterräume Ihre Ergebnisse.

b) Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben durch die Matrix:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Welche Dimension hat das Bild der Abbildung A ? Geben Sie auch eine Basis des Bildes an. *a): 1 P.*

• **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Basis: $\boxed{B = \{\boldsymbol{b}_1 = (3,3,1)^T, \boldsymbol{b}_2 = (7,5,2)^T, \boldsymbol{b}_3 = (1,2,0)^T\}}$

und die lineare Abbildung $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch:

$\boxed{\varphi(\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \varphi(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2,\ \varphi(\boldsymbol{b}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3}$

a) (i) Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(B)]_{E_3}$ an. *a): 1 P.*

(ii) Geben Sie die Matrixdarstellung der Basistransformation $T_{E_3 \leftarrow B}$ an.

b) Ist $T_{E_3 \leftarrow B}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls möglich, berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_3}$. *b): 5 P.*

c) Berechnen Sie $[\varphi(x)]_B$ mit $x = (1,1,1)^T$, wobei $[x]_{E_3} \overset{\text{!}}{=} x$ gilt. *c): 1 Zusatz-P.*

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Gleichungssystem (mit $s \in \mathbb{R}$), $A\boldsymbol{x} = b, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m = n = 3$:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} 3\,x_1 & + & s\,x_2 & + & s\,x_3 & = & 2 \\ 3\,x_1 & + & s\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 2 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & + & (s+1)\,x_3 & = & 1 \end{array}}$$

a) (i) Berechnen Sie, abhängig vom Wert von s, den Rang der Koeffizentenmatrix des obigen Gleichungssystems A und der erweiterten Matrix. *a): 3 P.*

(ii) Für welche Werte von s existiert keine, eine oder mehrere Lösungen (**mit Begründung!**)?

b) Beschränken Sie sich im Folgenden auf jene Wertebereiche von s für welche das Gleichungssystem lösbar ist. *b): 2 P.*

(i) Geben Sie, abhängig von s, eine Basis B des Kerns von A an.

(ii) Welche Dimension hat der Kern von A abhängig von s?

c) Geben Sie die allgemeinste Lösung für jene Werte von s an für die *c): 1 P.+ 1 Zusatz-P.*

(i) eine Schar von Lösungen existiert. *1 P.*

(ii) genau eine Lösung existiert. *1 Zusatz-P.*

Gruppe 3. Lösungen

1a) (i) $U: \; x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; \mathrm{Dim}\, U = 2$$

$W: \; x_1 = 2x_2 \Rightarrow$

$$x = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; \mathrm{Dim}\, W = 2$$

$$x \in U \cap W \Leftrightarrow x \in U \text{ und } x \in W \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 2s, \; \alpha = s, \; \beta = t \Leftrightarrow \alpha + \beta = s + t = 2s \Rightarrow s = t \Leftrightarrow$$

$$x \in U \cap W \Leftrightarrow x = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; \mathrm{Dim}\, U \cap W = 1$$

$$x \in U + W \Leftrightarrow x = u + w, \; u \in U, \; w \in W \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ lin. abh. sind überprüfen wir ob die ersten 3 Vektoren lin. unabhängig sind. Also,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 2s = 0, \; \alpha + s = 0, \; \beta = 0$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = s = 0$. Damit

$$U + W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \; \mathrm{Dim}\, U + W = 3, \; U + W = \mathbb{R}^3.$$

Damit haben wir

(ii) $\mathrm{Dim}\, U + W = \mathrm{Dim}\, U + \mathrm{Dim}\, W - \mathrm{Dim}\, U \cap W \Leftrightarrow$

$$3 = 2 + 2 - 1 \checkmark$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, $\mathrm{Rang}(A) = 3 \Rightarrow \mathrm{Dim}\, \mathcal{B}(A) = 3$ und $\mathcal{B}(A) = \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}(A) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

2.a) (i)

$$[\varphi(B)]_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $T_{E_3 \leftarrow B}$ ist als Transformationsmatrix zum Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$ regulär und damit bijektiv. Wir invertieren $T_{E_3 \leftarrow B}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $[\varphi(x)]_B = T_{B \leftarrow E_3} [\varphi(x)]_{E_3} = T_{B \leftarrow E_3} [\varphi(B)]_{E_3} [x]_B$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [x]_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[\varphi(x)]_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[x]_{E_3} \arrow[d, "T_{B \leftarrow E_3}"] & [\varphi(x)]_B \\ [x]_B \arrow[r, "{[\varphi(B)]_{E_3}}"'] & [\varphi(x)]_{E_3} \arrow[u, "T_{B \leftarrow E_3}"']\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^3$, B $\mathbb{R}^3$, E_3

Bemerkung:

$[x]_B$ kann man auch aus (*) berechnen:

(*) $[x]_B = T_{B \leftarrow E_3}[x]_{E_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3a) (i)(ii) $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n = m = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & s & 2 \\ 3 & s & 2 & 2 \\ 3 & 1 & s+1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & s & 2 \\ 0 & 0 & 2-s & 0 \\ 0 & 1-s & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & s & 2 \\ 0 & 1-s & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-s & 0 \end{array}\right)$$

1. Fall $s \neq 1$ und $s \neq 2$: $\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A \vdots b) = n$ $\exists!$ Lösung
2. Fall $s = 2$: $\mathrm{Rang}(A) = 2 = \mathrm{Rang}(A \vdots b) < n \Rightarrow \exists \infty$ Lösungen
3. Fall $s = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Also, $\mathrm{Rang}(A) = 2 \neq \mathrm{Rang}(A \vdots b = 3$ $\nexists$ Lösung

b) 1. Fall $s \neq 2$ und $s \neq 1$: $\mathrm{Rang}(A) = n \Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \{\emptyset\}$

$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Kern}(A) = 0$, Basis $= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Fall $s = 2$: $Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$x_3 := s$, $x_2 = +x_3 = s$, $3x_1 = -2x_2 - 2x_3 = -4s \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Kern}(A) = 1$.

c) (i) $s = 2 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 := s$,

$-x_2 = -1 - x_3 \Leftrightarrow x_2 = 1 + s$, $3x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_3 = \underbrace{2 - 2 - 2s - 2s}_{-4s}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Kern}(A)$

(ii) $s \neq 2$ und $s \neq 1 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 3 & s & s \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & 0 & 2-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_3 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{1-s}$, $3x_1 = 2 - s x_2 = 2 + \frac{s}{1-s}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-s}\begin{pmatrix} \frac{s}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$