Institut für Analysis und Scientific Computing | TU Wien
E. Weinmüller | WS 2013

# LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

## 2. Haupttest (MO, 20.01.2014)

— *Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** •

- **Aufgabe 1.**

a) Es sei $W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^5$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u} = (1,3,2,-5,1)^T, \qquad \mathbf{v} = (2,6,5,-14,4)^T}$$

aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an und bestimmen Sie die Dimension von $W^\perp$. *a): 4 P.*

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \,\epsilon\, W,\ \mathbf{w} \,\epsilon\, W^\perp : \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$

$$\begin{aligned} w_1 + 3w_2 + 2w_3 - 5w_4 + w_5 &= 0 \\ 2w_1 + 6w_2 + 5w_3 - 14w_4 + 4w_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 - 4w_4 + 2w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_3 = 4w_4 - 2w_5 \\ w_1 + 3w_2 + 2(4w_4 - 2w_5) - 5w_4 + w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_1 = -3w_2 - 3w_4 + 3w_5 \end{aligned}$$

$w_2 := r, w_4 := s, w_5 := t$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3r - 3s + 3t \\ r \\ 4s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$W^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{dim}\mathrm{W}^\perp = 3$$

b) Berechnen Sie die Norm und den Winkel zwischen den beiden Vektoren $x = (4,3,0)^T$ und $y = (1,2,2)^T$. *b): 2 P.*

$\|x\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$

$\|y\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\langle (4,3,0),(1,2,2) \rangle}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\alpha = \arccos \frac{2}{3} = 48,2^\circ$

- **Aufgabe 2.** Es sei $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}}$$

aufgespannt wird. Hinweis: Interpretieren Sie U geometrisch.

a) Berechnen Sie die Orthonormalbasis B von U. *a): 3 P.*

Da die Vektoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ und $\mathbf{u_3}$ linear unabhängig sind, gilt $U = \mathbb{R}^3$.
Gram- Schmidt- Verfahren mit abschließendem Normieren:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{8}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_3} - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} - 0 - \frac{6}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$

Falls man erkennt, dass $\mathbf{u_1} \perp \mathbf{u_3}$ gilt, ergibt sich:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_3}\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{u_3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_2} - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle u_2, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{8}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{36} \cdot \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{b_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$

b ) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von x bezüglich der ONB W mit $\mathbf{x} = (1, 5, 3)^T$. *b): 3 P.*

allgemeine Formel: $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b_i} \rangle$

$$\mathbf{x_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\mathbf{x_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{x_3} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

a ) Berechnen Sie die Jordansche Normalform $J$ und die dazugehörige Transformationsmatrix $X$. *a): 3 P.*

$$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)^2(1-\lambda) \quad \to \quad \begin{array}{lll} \lambda_1 = 4, & n_1 = 2, & 1 \le g_1 \le 2 \\ \lambda_2 = 1, & n_2 = 1, & g_2 = 1 \end{array}$$

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v_1}$$

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v_1}, \mathbf{h_1}, \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b ) Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\mathbf{x}(t) + e^{3t}\,(2,-1,8)^T$ mit der Randbedingung $\mathbf{x}(0) = (4,1,4)^T$. Berechnen Sie die Lösung dieses Systems. *b): 3 P.*

$$\mathbf{x_h} = C_1 \cdot v_1 \cdot e^{t\lambda_1} + C_2 \cdot (h_1 + t v_1) \cdot e^{t\lambda_1} + C_3 \cdot v_2 \cdot e^{t\lambda_2}$$

$$\to \mathbf{x_h} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{4t} + C_2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{4t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t}$$

$$\mathbf{x_p}(t) = a \cdot e^{3t}, \quad \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(t) = 3 \cdot a \cdot e^{3t} \quad \to \quad 3 \cdot a \cdot e^{3t} = A \cdot a \cdot e^{3t} + (2,-1,8)^T \cdot e^{3t}$$

$$\begin{aligned} 3a_1 &= 4a_1 + 2 \to a_1 = -2 \\ 3a_2 &= a_1 + 4a_2 - 1 \to a_2 = 3 \\ 3a_3 &= a_3 + 8 \to a_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\to \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathbf{x_p}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller



# L I N E A R E  A L G E B R A  F Ü R  T P H,  U E (103.064)

## 2. Haupttest (MO, 20.01.2014)

— *Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** ••

- **Aufgabe 1.**

a) Es sei $W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^5$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u} = (1, 2, -2, 3, -6)^T, \qquad \mathbf{v} = (2, 1, -4, 7, -15)^T}$$

aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an und bestimmen Sie die Dimension von $W^\perp$. *a): 4 P.*

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \,\epsilon\, W,\ \mathbf{w} \,\epsilon\, W^\perp : \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 - 2w_3 + 3w_4 - 6w_5 &= 0 \\ 2w_1 + w_2 - 4w_3 + 7w_4 - 15w_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3w_2 + w_4 - 3w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_4 = 3w_2 + 3w_5 \\ w_1 + 2w_2 - 2w_3 + 3(3w_2 + 3w_5) - 6w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_1 = -11w_2 + 2w_3 - 3w_5 \end{aligned}$$

$w_2 := r, w_3 := s, w_5 := t$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -11r + 2s - 3t \\ r \\ s \\ 3r + 3t \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$W^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \dim W^\perp = 3$$

b) Berechnen Sie die Norm und den Winkel zwischen den beiden Vektoren $x = (0, 3, 3)^T$ und $y = (2, 2, 1)^T$. *b): 2 P.*

$\|x\| = \sqrt{0 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$\|y\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\cos\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\langle (0,3,3),(2,2,1) \rangle}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot 3} = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$

- **Aufgabe 2.** Es sei $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

aufgespannt wird. Hinweis: Interpretieren Sie U geometrisch.

a ) Berechnen Sie die Orthonormalbasis B von U. *a): 3 P.*

Da die Vektoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ und $\mathbf{u_3}$ liear unabhängig sind, gilt $U = \mathbb{R}^3$.
Gram- Schmidt- Verfahren mit abschließendem Normieren:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \tfrac{w_1}{\|w_1\|} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u_2} - \tfrac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \tfrac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \tfrac{w_2}{\|w_2\|} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_3} - \tfrac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \tfrac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 - \tfrac{18}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_3} = \tfrac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

Falls man erkennt, dass $\mathbf{u_1} \perp \mathbf{u_3}$ gilt, ergibt sich:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \tfrac{w_1}{\|w_1\|} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_3} \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{u_3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \tfrac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_2} - \tfrac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \tfrac{\langle u_2, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \tfrac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{18}{81} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{b_3} = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

b ) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von x bezüglich der ONB W mit $\mathbf{x} = (1, 5, 3)^T$. *b): 3 P.*

allgemeine Formel: $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b_i} \rangle$

$$\mathbf{x_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{x_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\mathbf{x_3} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = \frac{2}{\sqrt{45}} + \frac{25}{\sqrt{45}} - \frac{12}{\sqrt{45}} = \frac{15}{\sqrt{45}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform $J$ und die dazugehörige Transformationsmatrix $X$. *a): 3 P.*

$$\det(A-\lambda I) = (5-\lambda)^2(2-\lambda) \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lll} \lambda_1 = 5, & n_1 = 2, & 1 \le g_1 \le 2 \\ \lambda_2 = 2, & n_2 = 1, & g_2 = 1 \end{array}$$

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v_1}$$

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v_1}, \mathbf{h_1}, \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\mathbf{x}(t) + e^{3t}\,(-4,2,5)^T$ mit der Randbedingung $\mathbf{x}(0) = (1,3,5)^T$. Berechnen Sie die Lösung dieses Systems. *b): 3 P.*

$$\mathbf{x_h} = C_1 \cdot v_1 \cdot e^{t\lambda_1} + C_2 \cdot (h_1 + t v_1) \cdot e^{t\lambda_1} + C_3 \cdot v_2 \cdot e^{t\lambda_2}$$

$$\rightarrow \mathbf{x_h} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{5t} + C_2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{5t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$\mathbf{x_p}(t) = a \cdot e^{3t}, \quad \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(t) = 3 \cdot a \cdot e^{3t} \qquad \rightarrow \qquad 3 \cdot a \cdot e^{3t} = A \cdot a \cdot e^{3t} + (-4,2,5)^T \cdot e^{3t}$$

$$\begin{aligned} 3a_1 &= 5a_1 - 4 \rightarrow a_1 = 2 \\ 3a_2 &= a_1 + 5a_2 + 2 \rightarrow a_2 = -2 \\ 3a_3 &= 2a_3 + 5 \rightarrow a_3 = 5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_p}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t}(C_1 + tC_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} C_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 + 2 &= 1 \rightarrow C_2 = -1 \\ C_1 - 2 &= 3 \rightarrow C_1 = 5 \\ C_3 + 5 &= 5 \rightarrow C_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 - t \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}(C_1 + tC_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} C_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 - 2 &= 4 \to C_2 = 6 \\ C_1 + 3 &= 1 \to C_1 = -2 \\ C_3 + 4 &= 4 \to C_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 + 6t \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2013

# LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

## 2. Haupttest (MO, 20.01.2014)

— *Tascherechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** ●●●

- **Aufgabe 1.**

a) Es sei $W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^5$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u} = (-3, 5, 1, 4, -2)^T, \qquad \mathbf{v} = (2, 10, 2, 12, 4)^T}$$

aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an und bestimmen Sie die Dimension von $W^\perp$. *a): 4 P.*

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \,\epsilon\, W,\ \mathbf{w} \,\epsilon\, W^\perp : \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$

$$\begin{aligned} -3w_1 + 5w_2 + w_3 + 4w_4 - 2w_5 &= 0 \\ 2w_1 + 10w_2 + 2w_3 + 12w_4 + 4w_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8w_1 + 4w_4 + 8w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_4 = -2w_1 - 2w_5 \\ -3w_1 + 5w_2 + w_3 + 4(-2w_1 - 2w_5) - 2w_5 &= 0 \quad \rightarrow \quad w_3 = 11w_1 - 5w_2 + 10w_5 \end{aligned}$$

$w_1 := r, w_2 := s, w_5 := t$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 11r - 5s + 10t \\ -2r - 2t \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$W^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{dim} W^\perp = 3$$

b) Berechnen Sie die Norm und den Winkel zwischen den beiden Vektoren $x = (2, 4, 4)^T$ und $y = (2, 0, 2)^T$. *b): 2 P.*

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|y\| = \sqrt{2^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\langle (2,4,4),(2,0,2) \rangle}{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{12}{12 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

- **Aufgabe 2.** Es sei $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der durch

$$\boxed{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

aufgespannt wird. Hinweis: Interpretieren Sie U geometrisch.

a) Berechnen Sie die Orthonormalbasis B von U. *a): 3 P.*

Da die Vektoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ und $\mathbf{u_3}$ linear unabhängig sind, gilt $U = \mathbb{R}^3$.
Gram- Schmidt- Verfahren mit abschließendem Normieren:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{20} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_3} - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 - \frac{6}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_3} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Falls man erkennt, dass $\mathbf{u_1} \perp \mathbf{u_3}$ gilt, ergibt sich:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_3} \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{u_3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{u_2} - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle u_2, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{20} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{6}{36} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{b_3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

b ) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von x bezüglich der ONB W mit $\mathbf{x} = (2, 6, 1)^T$. *b): 3 P.*

allgemeine Formel: $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b_i} \rangle$

$$\mathbf{x_1} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{x_2} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} + \frac{2}{6} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{x_3} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \frac{2}{\sqrt{30}} + \frac{30}{\sqrt{30}} - \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform $J$ und die dazugehörige Transformationsmatrix $X$. *a): 3 P.*

$$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)^2(4-\lambda) \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lll} \lambda_1 = 3, & n_1 = 2, & 1 \leq g_1 \leq 2 \\ \lambda_2 = 4, & n_2 = 1, & g_2 = 1 \end{array}$$

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v_1}$$

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v_1}, \mathbf{h_1}, \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\mathbf{x}(t) + e^{2t}\,(5,4,-6)^T$ mit der Randbedingung $\mathbf{x}(0) = (-2,6,3)^T$. Berechnen Sie die Lösung dieses Systems. *b): 3 P.*

$$\mathbf{x_h} = C_1 \cdot v_1 \cdot e^{t\lambda_1} + C_2 \cdot (h_1 + tv_1) \cdot e^{t\lambda_1} + C_3 \cdot v_2 \cdot e^{t\lambda_2}$$

$$\rightarrow \mathbf{x_h} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + C_2 \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{3t} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{4t}$$

$$\mathbf{x_p}(t) = a \cdot e^{2t}, \quad \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(t) = 2 \cdot a \cdot e^{2t} \qquad \rightarrow \qquad 2 \cdot a \cdot e^{2t} = A \cdot a \cdot e^{2t} + (5,4,-6)^T \cdot e^{2t}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 3a_1 + 5 \rightarrow a_1 = -5 \\ 2a_2 &= a_1 + 3a_2 + 4 \rightarrow a_2 = 1 \\ 2a_3 &= 4a_3 - 6 \rightarrow a_3 = 3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_p}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}(C_1 + tC_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} C_3 + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_3 + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 - 5 &= -2 \to C_2 = 3 \\ C_1 + 1 &= 6 \to C_1 = 5 \\ C_3 + 3 &= 3 \to C_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 + 3t \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$