

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (MO, 19.01.2015) (mit Lösung)

— Taschenrechner erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.**

Gegeben seien die folgende Basen des \mathbb{R}^3 : $E_3 = \{e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T\}$,
 $U = \{u_1 = (2, 3, 3)^T, u_2 = (6, 5, 7)^T, u_3 = (-2, 0, 1)^T\}$.

a) Geben Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow U}$ an.

a): 1 P.

$$T_{E_3 \leftarrow U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{U \leftarrow E_3}$.

b): 3 P.

$T_{E_3 \leftarrow U}$ invertieren, um $T_{U \leftarrow E_3}$ zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & | & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & | & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & 2 & 0 & | & \frac{3}{10} & -\frac{8}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{20} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$T_{U \leftarrow E_3} = T_{E_3 \leftarrow U}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -5 & 20 & -10 \\ 3 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie $[\mathbf{v}]_{E_3}$, $[\mathbf{v}]_U$, $[\mathbf{w}]_{E_3}$ und $[\mathbf{w}]_U$ für $\mathbf{v} = 4e_1 + 3e_2 - e_3$ und $\mathbf{w} = 6u_1 - 2u_2 + 11u_3$ mithilfe der Transformationsmatrizen.

c): 2 P.

Man sieht: $[\mathbf{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $[\mathbf{w}]_U = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Man berechnet:

$$[\mathbf{v}]_U = T_{U \leftarrow E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -22 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathbf{w}]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow U} \cdot [\mathbf{w}]_U = \begin{pmatrix} -22 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 2.** Es sei $B = \mathcal{L}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ein Unterraum des \mathbb{R}^3 mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Eine geometrische Interpretation erspart Rechenaufwand.

- a) Berechnen Sie die Orthonormalbasis N aus B .

a): 3 P.

Gram- Schmidt- Verfahren mit abschließendem Normieren:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{12}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \cdot \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 - \frac{20}{50} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

ODER man erkennt, dass U gleich \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3 \rangle = 0 \rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{b}_3 \rightarrow \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \cdot \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{12}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{20}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

b) Berechnen Sie die Orthonormalprojektion von \mathbf{u} bezüglich der ONB N mit $\mathbf{u} = (4, 7, 5)^T$. b): 3 P.

allgemeine Formel: $P(u) = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_i \rangle \mathbf{n}_i$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 7$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} + 7 \cdot 0 + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} + 7 \cdot 0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(u) = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ODER:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 7$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{12}{\sqrt{10}} + 7 \cdot 0 + \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{17}{\sqrt{10}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{4}{\sqrt{10}} + 7 \cdot 0 + \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}$$

$$P(u) = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{40}{10} \\ 0 \\ \frac{50}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Wie lässt sich Ihr Ergebnis aus b) erklären?

c): 1 Zusatz-P.

Die Orthogonalprojektion entspricht der identischen Abbildung des Vektors, weil B den gesamten \mathbb{R}^3 umfasst.

• Aufgabe 3.

a) Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ und die dazugehörigen Basen der Eigenräume $E(\lambda)$ der Matrix A .
Ist die Matrix diagonalisierbar? a): 5 P.

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(3 - \lambda) + 2 + 4 - 4(1 - \lambda) - 2(1 - \lambda) - (3 - \lambda) = 5\lambda^2 - \lambda^3 =$$

$$\lambda^2(5 - \lambda) := 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad n_1 = 2, \quad 1 \leq g_1 \leq 2$$

$$\lambda_2 = 5, \quad n_2 = 1, \quad g_2 = 1$$

Es gilt: $E(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I)$

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E(0) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 I) \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E(5) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, da gilt: $n_i \neq g_i$ (weil $n_1 = 2, g_1 = 1$).

b) Gegeben sei die Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

. Zeigen Sie, dass die Matrix indefinit ist.

b): 1 P.

Hauptminorenkriterium:

$$B_{11} = 1 > 0$$

$$\det B = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7 < 0$$

\implies Die Matrix B ist weder positiv noch negativ definit.

Weiter mithilfe der quadratischen Form:

$$q(x) = x^T B x = (x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2, 3x_1 + 2x_2)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ (x_1 + 3x_2)x_1 + (3x_1 + 2x_2)x_2 = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

1. Fall: $6x_1x_2 < x_1^2 + 2x_2^2$

$$\text{z.B. } x = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow -1,5 < 0,75 \text{ w.A. und } q(x) = -0,75 < 0$$

2. Fall: $6x_1x_2 > x_1^2 + 2x_2^2$

$$\text{z.B. } x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow 1,5 > 0,75 \text{ w.A. und } q(x) = 2,25 > 0$$

\implies Die Matrix B ist indefinit.