Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2014

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (MO, 19.01.2015) *(mit Lösung)*

— *Taschenrechner erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ●●●

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Matrix: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ und die dazugehörigen Basen der Eigenräume $E(\lambda)$ der Matrix A. Ist die Matrix diagonalisierbar? *a): 5 P.*

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 6 - 6(1-\lambda) - 2(1-\lambda) - (4-\lambda) = 6\lambda^2 - \lambda^3 =$

$\lambda^2(6-\lambda) := 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad n_1 = 2, \quad 1 \leq g_1 \leq 2$

$\lambda_2 = 6, \quad n_2 = 1, \quad g_2 = 1$

Es gilt: $E(\lambda) = Kern(A - \lambda I)$

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E(0) = \left\{ v \,\epsilon\, \mathbb{R}^3 : v = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \,\epsilon\, \mathbb{R} \right\}$$

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E(5) = \left\{ v \,\epsilon\, \mathbb{R}^3 : v = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \,\epsilon\, \mathbb{R} \right\}$$

Die Matrix A ist <u>nicht diagonalisierbar</u>, da gilt: $n_i \neq g_i$ (weil $n_1 = 2, g_1 = 1$).

b) Gegeben sei die Matrix: $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$. Zeigen Sie, dass die Matrix indefinit ist. *b): 1 P.*

Hauptminorenkriterium:

$B_{11} = 1 > 0$
$detB = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = 4 - 25 = -19 < 0$

$\Longrightarrow$ Die Matrix B ist weder positiv noch negativ definit.

Weiter mithilfe der quadratischen Form:

$$q(x) = x^T Bx = (x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 5x_2, 5x_1 + 4x_2)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$(x_1 + 5x_2)x_1 + (5x_1 + 4x_2)x_2 = x_1^2 + 10x_1x_2 + 4x_2^2$$

1. Fall: $10x_1x_2 < x_1^2 + 4x_2^2$

z.B. $x = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -2.5 < 1.25$ w.A. und $q(x) = -1.25 < 0$

2. Fall: $10x_1x_2 > x_1^2 + 4x_2^2$

z.B. $x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 2.5 > 1.25$ w.A. und $q(x) = 3.75 > 0$

$\Longrightarrow$ Die Matrix B ist $\underline{indefinit}$.

- **Aufgabe 2.**

Gegeben seien die folgende Basen des $\mathbb{R}^3$: $\boxed{E_3 = \{\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T\}}$,
$\boxed{U = \{\boldsymbol{u}_1 = (5,2,2)^T, \boldsymbol{u}_2 = (8,4,7)^T, \boldsymbol{u}_3 = (-6,0,3)^T\}}$.

a) Geben Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow U}$ an. *a): 1 P.*

$$T_{E_3 \leftarrow U} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Transformationsmatrix $T_{U \leftarrow E_3}$. *b): 3 P.*

$T_{E_3 \leftarrow U}$ invertieren, um $T_{U \leftarrow E_3}$ zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 8 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & \frac{19}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & \frac{19}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{19}{24} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$T_{U \leftarrow E_3} = T_{E_3 \leftarrow U}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -12 & 66 & -24 \\ 6 & -27 & 12 \\ -6 & 19 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie $[\mathbf{v}]_{\mathbf{E_3}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathbf{U}}$, $[\mathbf{w}]_{\mathbf{E_3}}$ und $[\mathbf{w}]_{\mathbf{U}}$ für $\mathbf{v} = 4e_1 + 3e_2 + \frac{1}{4}e_3$ und $\mathbf{w} = -7u_1 + 5u_2 - u_3$ mithilfe der Transformationsmatrizen. *c): 2 P.*

Man sieht: $[\mathbf{v}]_{\mathbf{E_3}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und $[\mathbf{w}]_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man berechnet:

$[\mathbf{v}]_{\mathbf{U}} = T_{U \leftarrow E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathbf{E_3}} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 72 \\ -27 \\ 16 \end{pmatrix}$ und $[\mathbf{w}]_{\mathbf{E_3}} = T_{E_3 \leftarrow U} \cdot [\mathbf{w}]_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$

- **Aufgabe 3.**
  Es sei $B = \mathcal{L}\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boxed{\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Hinweis: Eine geometrische Interpretation erspart Rechenaufwand.

a) Berechnen Sie die Orthonormalbasis N aus B. *a): 3 P.*

Gram- Schmidt- Verfahren mit abschließendem Normieren:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{b_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{n_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_2} = \mathbf{b_2} - \frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{24}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{n_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{b_3} - \frac{\langle b_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle b_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 - \frac{8}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{n_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

<u>ODER</u> man erkennt, dass U gleich $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{u_1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{n_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{b_1}, \mathbf{b_3} \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w_2} = \mathbf{b_3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{n_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{b_2} - \frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \mathbf{w_1} - \frac{\langle b_2, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{24}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{n_3} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die ONB gegeben durch: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Berechnen Sie die Orthonormalprojektion von $\mathbf{u}$ bezüglich der ONB N mit $\mathbf{u} = (4,7,5)^T$. *b): 3 P.*

allgemeine Formel: $P(u) = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n_i} \rangle \mathbf{n_i}$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_1} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 7$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_2} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \tfrac{4}{\sqrt{2}} + 7 \cdot 0 + \tfrac{5}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_3} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -\tfrac{4}{\sqrt{2}} + 7 \cdot 0 + \tfrac{5}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(u) = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{9}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>ODER</u>:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_1} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 7$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_2} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = \tfrac{4}{\sqrt{10}} + 7 \cdot 0 + \tfrac{15}{\sqrt{10}} = \tfrac{19}{\sqrt{10}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n_3} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \tfrac{12}{\sqrt{10}} + 7 \cdot 0 - \tfrac{5}{\sqrt{10}} = \tfrac{7}{\sqrt{10}}$$

$$P(u) = 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{19}{\sqrt{10}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{\sqrt{10}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{40}{10} \\ 0 \\ \frac{50}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Wie lässt sich Ihr Ergebnis aus b) erklären? *c): 1 Zusatz-P.*

Die Orthogonalprojektion entspricht der identischen Abbildung des Vektors, weil B den gesamten $\mathbb{R}^3$ umfasst.