Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2014

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1, Gruppe 1 (FR, 21.11.2014) *(mit Lösung)*

— *Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (Koeffizientenmatrix A, Inhomogenität $\mathbf{b}$) gegeben:

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 5\,x_4 & = & -3 \\ 4\,x_1 & + & 7\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & 5\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & -1 \end{array}}$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$! (2P)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 11 & -1 \\ 0 & 3 & 13 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \text{Rang}(A)\text{=Rang}(A|\mathbf{b})\text{= } 3$$

b) Was lässt sich aus dem Ergebnis von a) über die Lösbarkeit des Gleichungssystems aussagen? Geben Sie eine genaue Begründung an! (1P)

c) Geben Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an! (1P)

$\text{Rang}(A) = \text{Rang }(A|\mathbf{b})$
Das Gleichungssystem ist deshalb lösbar.
($\mathbf{b}$ ist somit als Linearkombination der Spaltenvektoren von A darstellbar.)
allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie eine Basis B des Kerns von A an! (1P)

e) Welche Dimension hat der Kern von A und warum? (1P)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension des Kerns ist gleich der Anzahl seiner Basisvektoren:

$\dim \operatorname{Kern}(A) = 1$

- **Aufgabe 2.**

Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen!

$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\varphi(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + x_2x_3$

$\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 \\ 9\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 12\,x_3 \end{pmatrix}$$

a) Welche der beiden Abbildungen sind/ist linear?
Zeigen Sie explizit, dass die jeweilige Abbildung linear bzw. dass sie nicht linear ist! (2P)

$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 2(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) + (x_2+y_2)(x_3+y_3) =$
$2x_1 + 5x_2 + x_2x_3 + 2y_1 + 5y_2 + y_2y_3 + x_2y_3 + x_3y_2 =$
$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) + x_2y_3 + x_3y_2 \neq \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \to$ nicht linear

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3(x_1+y_1) & - & 2(x_2+y_2) & + & 4(x_3+y_3) \\ 9(x_1+y_1) & - & 6(x_2+y_2) & + & 12(x_3+y_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3x_1 - 2x_2 + 4x_3) & + & (3y_1 - 2y_2 + 4y_3) \\ (9x_1 - 6x_2 + 12x_3) & + & (9y_1 - 6y_2 + 12y_3) \end{pmatrix} = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$$

$$\psi(\mathbf{sx}) = \begin{pmatrix} 3(sx_1) & - & 2(sx_2) & + & 4(sx_3) \\ 9(sx_1) & - & 6(sx_2) & + & 12(sx_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(3x_1 - 2x_2 + 4x_3) \\ s(9x_1 - 6x_2 + 12x_3) \end{pmatrix} = s\varphi(\mathbf{x}) \text{ linear}$$

b) Bestimmen Sie im Fall der Linearität:
(i) die Matrix der Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$! (2P)
(ii) das Bild der Abbildung! (1P)

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e_1}) & \varphi(\mathbf{e_2}) & \varphi(\mathbf{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 9 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & b_1 \\ 9 & -6 & 12 & b_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & (b_2 - 3b_1) \end{array}\right)$$

$b_2 - 3b_1$ muss gleich 0 sein, damit b im Bild von A liegt.

$$\to 3b_1 = b_2 \to Bild(A) = \{\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})\}$$

(iii) den Kern der Abbildung! (1P)

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 12 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wähle $x_2 = 3s, x_3 = 3t \to x_1 = 2s - 4t \to Kern(A) = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})$

• **Aufgabe 3.** Es sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$, der durch die direkte Summe der folgenden zwei Unterräume U und W gegeben ist, d.h.: $V \subset R^4,\ V = U \oplus W$.

$$U = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})\ W = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})\ v = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in V$$

a) Geben Sie eine Basis B = $\{b_1, b_2, b_3\}$ von V an! (1P)

b) Zeigen Sie explizit, dass die Basisvektoren linear unabhängig sind! (1P)

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$s_1 + s_3 = 0$
$2s_1 + 3s_3 = 0$
$s_3 = 0 \to s_1 = 0 \to s_2 = 0 \to$ linear unabhängig
$3s_1 + s_2 = 0$ w.A.

c) Geben Sie den Koordinatenvektor $[v]_B$ bezüglich der Basis B an! (1P)

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$v_1 + v_3 = 4$
$2v_1 + 3v_3 = 8$
$v_3 = 3 \to v_1 = 1 \to 2 + 3v_2 = 8 \to v_2 = 2$
$3v_1 + v_2 = 5$
$3 + 2 = 5$ w.A.

$$\to [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d) Zeigen Sie anhand der beiden Matrizen A und B, dass gilt:
$(A+B)^T = A^T + B^T$ (1P)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

e) Kommutieren die beiden Matrizen A und B?
Zeigen Sie explizit, dass sie kommutieren bzw. dass sie nicht kommutieren! *(1 Zusatz-P)*

f) Geben Sie die Inverse A^{-1} von A an! (1P)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to AB = BA, \text{ d.h. } A \text{ und } B \text{ kommutieren.}$$

$A^{-1} = B$

g) Ist die durch die Matrix A beschriebene Abbildung φ injektiv, surjektiv und/oder bijektiv?
Begründen Sie Ihre Aussage! (1P)

$A \in R^{2\times 2}$, d.h. $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Es existiert eine Inverse A^{-1} von A, also ist Rang(A)=2.
$\to$ Kern(A)={ }, also ist φ bijektiv, also injektiv und surjektiv.

(Hinweis: Vielleicht kann man sich mit der Lösung des Zusatzbeispiels etwas Rechenaufwand sparen.)