

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

Test 1, Gruppe 2 (FR, 21.11.2014) (mit Lösung)

— Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** Es sei V ein Unterraum des \mathbb{R}^4 , der durch die direkte Summe der folgenden zwei Unterräume U und W gegeben ist, d.h.: $V \subset \mathbb{R}^4$, $V = U \oplus W$.

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad v = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$$

a) Geben Sie eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ von V an! (1P)

b) Zeigen Sie explizit, dass die Basisvektoren linear unabhängig sind! (1P)

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$s_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4s_1 + s_2 = 0$$

$$3s_1 + s_3 = 0$$

$$5s_2 + s_3 = 0$$

$$2s_3 = 0 \rightarrow s_3 = 0 \rightarrow s_2 = 0 \rightarrow s_1 = 0 \rightarrow \text{linear unabhängig}$$

c) Geben Sie den Koordinatenvektor $[v]_B$ bezüglich der Basis B an! (1P)

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4v_1 + v_2 = 9$$

$$3v_1 + v_3 = 8$$

$$5v_2 + v_3 = 7 \rightarrow v_1 = 2 \rightarrow v_2 = 1 \rightarrow v_3 = 2$$

$$2v_3 = 4$$

$$4 = 4 \text{ w.A.}$$

$$\rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- d) Zeigen Sie anhand der beiden Matrizen A und B, dass gilt: (1P)

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^T = \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

- e) Kommutieren die beiden Matrizen A und B?
Zeigen Sie explizit, dass sie kommutieren bzw. dass sie nicht kommutieren! (1 Zusatz-P)

- f) Geben Sie die Inverse A^{-1} von A an! (1P)

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = BA, \text{ d.h. } A \text{ und } B \text{ kommutieren.}$$

$$A^{-1} = B$$

- g) Ist die durch die Matrix A beschriebene Abbildung φ injektiv, surjektiv und/oder bijektiv?
Begründen Sie Ihre Aussage! (1P)

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ d.h. } \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Es existiert eine Inverse A^{-1} von A, also ist $\text{Rang}(A)=2$.

$\rightarrow \text{Kern}(A)=\{\}$, also ist φ bijektiv, also injektiv und surjektiv.

(Hinweis: Vielleicht kann man sich mit der Lösung des Zusatzbeispiels etwas Rechenaufwand sparen.)

- **Aufgabe 2.** Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ist das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (Koeffizientenmatrix A , Inhomogenität \mathbf{b}) gegeben:

$$\begin{array}{rccccrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -7 \end{array}$$

- a) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})!$ (2P)

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 10 & -9 \\ 0 & -1 & -12 & -10 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2 \end{array}$$

- b) Was lässt sich aus dem Ergebnis von a) über die Lösbarkeit des Gleichungssystems aussagen? Geben Sie eine genaue Begründung an! (1P)
- c) Geben Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an! (1P)

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b})$$

Das Gleichungssystem ist deshalb lösbar.

(\mathbf{b} ist somit als Linearkombination der Spaltenvektoren von A darstellbar.)

allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie eine Basis B des Kerns von A an! (1P)

e) Welche Dimension hat der Kern von A und warum? (1P)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension des Kerns ist gleich der Anzahl seiner Basisvektoren:
 $\dim \text{Kern}(A) = 2$

• **Aufgabe 3.**

Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen!

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ -4x_1 + 6x_2 + 10x_3 \end{pmatrix}$$

a) Welche der beiden Abbildungen sind/ist linear?

Zeigen Sie explizit, dass die jeweilige Abbildung linear bzw. dass sie nicht linear ist! (2P)

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 3(x_2 + y_2) + 4(x_3 + y_3) =$$

$$x_1x_2 + 3x_2 + 4x_3 + y_1y_2 + 3y_2 + 4y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 =$$

$$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) + x_1y_2 + x_2y_1 \neq \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \rightarrow \text{nicht linear}$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) \\ -4(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) + 10(x_3 + y_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2x_1 + 3x_2 + 5x_3) + (-2y_1 + 3y_2 + 5y_3) \\ (-4x_1 + 6x_2 + 10x_3) + (-4y_1 + 6y_2 + 10y_3) \end{pmatrix} = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$$

$$\psi(s\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2(sx_1) + 3(sx_2) + 5(sx_3) \\ -4(sx_1) + 6(sx_2) + 10(sx_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(-2x_1 + 3x_2 + 5x_3) \\ s(-4x_1 + 6x_2 + 10x_3) \end{pmatrix} = s\varphi(\mathbf{x}) \text{ lin.}$$

b) Bestimmen Sie im Fall der Linearität:

(i) die Matrix der Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n ! (2P)

(ii) das Bild der Abbildung! (1P)

$$A = (\varphi(\mathbf{e}_1) \quad \varphi(\mathbf{e}_2) \quad \varphi(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 5 & b_1 \\ -4 & 6 & 10 & b_2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & (b_2 - 2b_1) \end{array} \right)$$

$b_2 - 2b_1$ muss gleich 0 sein, damit \mathbf{b} im Bild von A liegt.

$$\rightarrow 2b_1 = b_2 \rightarrow \text{Bild}(A) = \left\{ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \right\}$$

(iii) den Kern der Abbildung! (1P)

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 6 & 10 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Wähle } x_3 = 2s, x_2 = 2t \rightarrow x_1 = 3t + 5s \rightarrow \text{Kern}(A) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$