

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 20.11.2015) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• Aufgabe 1.

a) (2 Punkte) Gegeben sind drei Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$. Ist $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ?

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ansatz:
$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -31 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich $s_2 = 0$, somit folgt aus der 3. und 1. Zeile $s_1 = 0, s_3 = 0$. Diese Lösung ist eindeutig, die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis des \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (3 Punkte) Schreiben Sie den Vektor $\mathbf{v} = (20, 0, -3)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ansatz:
$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 2 & 20 \\ 3 & 8 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 11 & 7 & -10 \\ 0 & -6 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & -31 & 0 & -31 \\ 0 & -6 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

Daraus folgt $s_1 = \frac{16}{3}, s_2 = 1, s_3 = -3$.



- c) (1 Punkt) Bekommt man eine neue Basis von \mathbb{R}^3 wenn man den Vektor $\mathbf{b}_4 = (1, 2, 3)^T$ zur Basis B aus a) hinzufügt?

Nein, da die Basis B des \mathbb{R}^3 schon die maximale Anzahl von Basisvektoren enthält, nämlich drei. Somit MUSS jeder andere Vektor des \mathbb{R}^3 als Linearkombination der Basisvektoren in B (eindeutig) darstellbar sein.

• **Aufgabe 2.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x_1 + (p - 5)x_3 &= 0, \\2x_1 + x_2 + (p - 6)x_3 + 2x_4 &= 2, \\3x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= 4. \\x_1 - 3x_3 &= 1.\end{aligned}$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des Gleichungssystems an.

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p-5 & 0 \\ 2 & 1 & p-6 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$. Für welche Werte von p gibt es (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

Wir führen die Gauß Zerlegung für die erweiterte Matrix $(A|\mathbf{b})$ durch, um den Rang zu bestimmen,

$$\begin{aligned}& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & p-6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_2-2z_1 \\ z_3-3z_1 \\ z_4-z_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-p & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8-3p & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2-p & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{z_3-z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-p & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4-2p & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-p & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-p & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-p & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-p & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{z_4-z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-p & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-p & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3 \forall p \in \mathbb{R}$. Für $p = 2$ ist $\text{Rang}(A) = 2$, sonst ist $\text{Rang}(A) = 3$. Daher gilt:

- (i) Für $p = 2$ gibt es keine Lösung.
- (ii) Es gibt kein p , so dass es genau eine Lösung gibt.
- (iii) Für $p \neq 2$ gibt es unendlich viele Lösungen.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems für $p = 1$.

Wir haben drei Gleichungen für vier Unbekannte, also benötigen wir einen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

3. Zeile: $x_3 = 1$.

2. Zeile: $x_2 + 3 + 2x_4 = 2$. Das ist eine Unbekannte zu viel, also wählen wir $x_4 = t$ und erhalten $x_2 = -(1 + 2t)$.

1. Zeile: $x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$.

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Aufgabe 3.

a) (2 Punkte) Seien U und W folgende Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$U := \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T : x_1 = x_3, x_2 = ax_4, a \in \mathbb{R} \}$$

und

$$W := \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T : x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie die Dimensionen von U und W an und jeweils eine Basis.

Die Dimension von U ist 2, d.h., U wird von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt. Die Dimension für W ist 1, W wird von einem Vektor aufgespannt. Eine Basis von U , B_U , und eine Basis von W , B_W sind gegeben durch

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (2 Punkte) Geben Sie eine Basis für $U + W$ an. Welche Dimension hat $U + W$?

Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, ist $U + W$ dreidimensional und die Basis für $U + W$, B_{U+W} , lautet

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie $U \cap W$. Wie groß ist die Dimension von $U \cap W$?

Alle Elemente aus $U \cap W$ liegen sowohl in U als auch in W und können deshalb sowohl mit Hilfe der Basis B_U als auch mit Hilfe der Basis B_W dargestellt werden. Daher muss es drei Konstanten r_1 , r_2 und s so geben, dass

$$r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Das liefert

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ ar_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, $r_1 = 0$, $s = 0$ und $r_2 = 0$. Für alle Werte $a \in \mathbb{R}$, besteht $U \cap W$ genau aus einem Element, dem Nullelement, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ und die Dimension von $U \cap W$ ist Null.

ALTERNATIVE LÖSUNG MIT HILFE DES DIMENSIONSSATZES FÜR UNTERRÄUME

Der Dimensionssatz für Unterräume (VO-Skript Satz 1.12) besagt, dass

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Da $\dim(U) = 2$ und $\dim(W) = 1$ aus der Angabe und $\dim(U + W) = 3$ aus Aufgabenteil b) bekannt sind, ergibt sich sofort $\dim(U \cap W) = 0$.

d) (1 Punkt) Bildet die Matrix A mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 4$ eine Basis von \mathbb{R}^5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} ?$$

Die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben jeweils die einzigen Einträge in der 1ten und 2ten Zeile, sind also mit $C_2 \neq 0$ linear unabhängig zu den anderen Vektoren. Zu überprüfen bleibt, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

aus linear unabhängigen Vektoren besteht, also vollen Rang besitzt. Einige elementare Zeilenumformungen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & C_1 - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 + z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & C_1 - 1 + 4 \end{pmatrix}$$

zeigen, dass die Matrix A für $C_1 = 1$ vollen Rang besitzt, bzw. $C_1 - 1 + 4 \neq 0$ gilt. Fünf linear unabhängige Vektoren aus \mathbb{R}^5 bilden eine Basis von \mathbb{R}^5 und damit bilden die Spalten der Matrix A mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 4$ eine Basis von \mathbb{R}^5 .

Zusatzaufgabe (1 Punkt) Für welche C_1, C_2 ist die Matrix A aus Aufgabe 3 d) invertierbar?

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt. Wie in Aufgabe 3 d) bereits gezeigt, besitzt die Matrix genau dann vollen Rang, ist also invertierbar, wenn $C_1 \neq -3$ und $C_2 \neq 0$ gilt.