Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2015

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 20.11.2015)

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •••

- **Aufgabe 1.**

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + (p-5)x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 + (p-4)x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + (p-3)x_3 - 6x_4 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + (p-5)x_3 - 6x_4 &= 6. \end{aligned}$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p-5 & 0 \\ 2 & 1 & p-4 & -3 \\ 3 & 2 & p-3 & -6 \\ 4 & 2 & p-5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Für welche Werte von p gibt es (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

Wir führen die Gauß Zerlegung für die erweiterte Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ durch, um den Rang zu bestimmen,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & p-4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & p-3 & -6 & 5 \\ 4 & 2 & p-5 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{z}_4 - \boldsymbol{z}_1]{\substack{\boldsymbol{z}_2 - 2\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_3 - 3\boldsymbol{z}_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6-p & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 12-2p & -6 & 8 \\ 0 & 2 & 15-3p & -6 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{z}_3 - 2\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_4 - 2\boldsymbol{z}_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6-p & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-p & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & p-5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6-p & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3-p & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3\, \forall p \in \mathbb{R}$. Für $p = 3$ ist $\text{Rang}(A) = 2$, sonst ist $\text{Rang}(A) = 3$. Daher gilt:

(i) Für $p = 3$ gibt es keine Lösung.

(ii) Es gibt kein p, so dass es genau eine Lösung gibt.

(iii) Für $p \neq 3$ gibt es unendlich viele Lösungen.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems für $p = 1$.

Wir haben drei Gleichungen für vier Unbekannte, also benötigen wir einen Parameter $t \in \mathbb{R}$.
3. Zeile: $2x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$.
2. Zeile: $x_2 + 5 - 3x_4 = 4$. Das ist eine Unbekannte zu viel, also wählen wir $x_4 = t$ und erhalten $x_2 = 3t - 1$.
1. Zeile: $x_1 - 4 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$.
Damit erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (2 Punkte) Seien U und W folgende Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T : cx_2 = x_4, \;\; x_1 = 3x_2, \;\; c \in \mathbb{R}\}$$

und

$$W := \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T : x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie die Dimensionen von U und W an und jeweils eine Basis.

Die Dimension von U ist 2, d.h., U wird von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt.
Die Dimension für W ist 1, W wir von einem Vektor aufgespannt.
Eine Basis von U, B_U, und eine Basis von W, B_W sind gegeben durch

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (2 Punkte) Geben Sie eine Basis für $U + W$ an. Welche Dimension hat $U + W$?

Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, ist $U + W$ dreidimensional und die Basis für $U + W$, B_{U+W}, lautet

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie $U \cap W$. Wie groß ist die Dimension von $U \cap W$?

Alle Elemente aus $U \cap W$ liegen sowohl in U als auch in W und können deshalb sowohl mit Hilfe der Basis B_U als auch mit Hilfe der Basis B_W dargestellt werden. Daher muss es drei Konstanten r_1, r_2 und s so geben, dass

$$r_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Das liefert

$$\begin{pmatrix} 3r_1 \\ r_1 \\ r_2 \\ cr_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, $r_1 = 0$, $s = 0$ und $r_2 = 0$. Für alle Werte $c \in \mathbb{R}$, besteht $U \cap W$ genau aus einem Element, dem Nullelement, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ und die Dimension von $U \cap W$ ist Null.

ALTERNATIVE LÖSUNG MIT HILFE DES DIMENSIONSSATZES FÜR UNTERRÄUME

Der Dimensionssatz für Unterräume (VO-Skript Satz 1.12) besagt, dass

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Da $dim(U) = 2$ und $dim(W) = 1$ aus der Angabe und $dim(U + W) = 3$ aus Aufgabenteil b) bekannt sind, ergibt sich sofort $dim(U \cap W) = 0$.

d) (1 Punkt) Bildet die Matrix A mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 5$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}?$$

Die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad und \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

haben jeweils die einzigen Einträge in der 1ten und 5ten Zeile, sind also mit $C_2 \neq 0$ linear unabhängig zu den anderen Vektoren. Zu überprüfen bleibt, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

aus linear unabhängigen Vektoren besteht, also vollen Rang besitzt. Einige elementare Zeilenumformungen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boldsymbol{z_3 - z_1}]{\boldsymbol{z_2 - z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & C_1 - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{z_3 + z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & C_1 - 1 + 2 \end{pmatrix}$$

zeigen, dass die Matrix A für $C_1 = 1$ vollen Rang besitzt, bzw. $C_1 - 1 + 2 \neq 0$ gilt. Fünf linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^5$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^5$ und damit bilden die Spalten der Matrix A mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 5$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$.

Zusatzaufgabe (1 Punkt) Für welche C_1, C_2 ist die Matrix A aus Aufgabe 2 d) invertierbar?

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt. Wie in Aufgabe 2 d) bereits gezeigt, besitzt die Matrix genau dann vollen Rang, ist also invertierbar, wenn $C_1 \neq -1$ und $C_2 \neq 0$ gilt.

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Gegeben sind drei Vektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3} \in \mathbb{R}^3$. Ist $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\boxed{\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Ansatz: $$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 6 & 0 \\ -9 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -11 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der 3. Zeile ergibt sich $s_1 = 0$, somit folgt aus der 1. und 2. Zeile $s_3 = 0, s_2 = 0$. Diese Lösung ist eindeutig, die Vektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$ sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis des $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (3 Punkte) Schreiben Sie den Vektor $\mathbf{v} = (2, 6, 0)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$.

Ansatz: $$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 6 & 2 \\ -9 & 3 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 10 \\ -11 & 4 & 0 & -10 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ -7 & 0 & 0 & -\frac{70}{3} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Daraus folgt } s_1 = \tfrac{10}{3}, s_2 = \tfrac{20}{3}, s_3 = -8.$$

c) (1 Punkt) Bekommt man eine neue Basis von $\mathbb{R}^3$ wenn man den Vektor $\mathbf{b_4} = (1, 2, 3)^T$ zur Basis B aus a) hinzufügt?

Nein, da die Basis B des $\mathbb{R}^3$ schon die maximale Anzahl von Basisvektoren enthält, nämlich drei. Somit MUSS jeder andere Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Basisvektoren in B (eindeutig) darstellbar sein.