Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2015

L I N E A R E   A L G E B R A   F Ü R   T P H,   U E (103.064)

2. Haupttest (MO, 18.01.2016) / Gruppe 2 *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ○

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Matrix: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$

a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J und die dazugehörige Transformationsmatrix X. *a): 5 P.*

$\det(A-\lambda I) = (5-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)-8) = (5-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \quad \rightarrow$
$\lambda_1 = -1, \quad n_1 = 1 = g_1,$

$\lambda_{2,3} = 5, \quad n_2 = 2, \quad 1 \leq g_2 \leq 2$

$$(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_2} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{Rang}(A-\lambda_2 I) = 2$ gilt, gibt es nur einen Eigenvektor, d.h. es gibt einen Hauptvektor:

$$(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{h_2} = \mathbf{v_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Für } t = 2$$

$$\text{folgt } \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{h_2}) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$AX = XJ$ ist erfüllt ✓

b) Ist A invertierbar? (Begründung reicht aus.) *b): 1 P.*

A ist invertierbar, da 0 kein Eigenwert von A ist.

• **Aufgabe 2.** Seien $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$, welche durch die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad b_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

und

$$c_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad c_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

definiert sind.

Sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Basisvektoren der Basis B definiert

$$\phi(b_1) = c_1 - c_3 \qquad \phi(b_2) = c_2 + c_3 \qquad \phi(b_3) = 2c_1 + c_3 \qquad \phi(b_4) = 2c_2 + c_3.$$

a) (1 Punkt) Die lineare Abbildung ϕ kann bezüglich der beiden Basen B und C mit Hilfe der Matrix $[\phi(B)]_C := A$ dargestellt werden. Geben Sie diese Matrix an.

Wie direkt aus der Definition ersichtlich, lautet die gesuchte Matrix

$$[\phi(B)]_C = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Nun seien zwei weitere Basen $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$ und $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3\}$, mit den Basisvektoren

$$\tilde{b}_1 = b_1 \qquad \tilde{b}_2 = b_2 + b_1 \qquad \tilde{b}_3 = b_3 + b_2 + b_3 \qquad \tilde{b}_4 = b_4 + b_3 + b_2 + b_1$$

und

$$\tilde{c}_1 = c_1 \qquad \tilde{c}_2 = c_2 + c_1 \qquad \tilde{c}_3 = c_3 + c_2 + c_3$$

definiert. Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung ϕ begüglich der Basen $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$, $[\phi(\tilde{B})]_{\tilde{C}} := \tilde{A}$, an.

Unter Verwendung von Satz 3.9 aus dem Vorlesungsskriptum gilt

$$\tilde{A} = \big[\phi\big(\tilde{B}\big)\big]_{\tilde{C}} = T_{\tilde{C}\leftarrow C}\big[\phi\big(B\big)\big]_C T^{-1}_{\tilde{B}\leftarrow B} = T_{\tilde{C}\leftarrow C}\big[\phi\big(B\big)\big]_C T_{B\leftarrow\tilde{B}} = T_{\tilde{C}\leftarrow C} A T_{B\leftarrow\tilde{B}}.$$

Es müssen also die beiden Transformationsmatrizen $T_{\tilde{C}\leftarrow C}$ und $T_{B\leftarrow\tilde{B}}$ bestimmt werden. Die einzelnen Spaltenvektoren $s^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, der Transformationsmatrix $T_{B\leftarrow\tilde{B}}$ können simultan durch Lösen der Gleichungssysteme

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

bestimmt werden.

Gleiches Vorgehen wird für die Transformationsmatrix $T_{\tilde{C}\leftarrow C}$ verwendet. Nach dem Lösen der Gleichungssysteme ergeben sich die Transformationsmatrizen

$$T_{\tilde{C}\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_{B\leftarrow\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit deren Hilfe man die Darstellung der Abbildung ϕ bzgl. der Basen $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ findet,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung mit den Basen $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ wie oben, mit Ausnahme von $\tilde{b}_3 = b_1 + b_2 + b_3$ bzw. $\tilde{c}_3 = c_1 + c_2 + c_3$ wird ebenfalls akzeptiert.
Dabei ergeben sich die Transformationsmatrizen und die Matrix $\tilde{A}$ zu

$$T_{\tilde{C}\leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{B\leftarrow\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich den kanonischen Basen E_3 und E_4, $[\phi(E_4)]_{E_3}$. Sie können dabei die Matrix A (oder $\tilde{A}$) verwenden oder direkt vorgehen.

Das direkte Vorgehen spart Zeit.

Die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ der Abbildung ϕ bezüglich der Basen E_3 und E_4 kann mit Hilfe des Zusammenhangs

$$[\phi(E_4)]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow C} A T_{B \leftarrow E_4}$$

berechnet werden und es folgt,

$$T_{E_3 \leftarrow C} = (c_1, c_2, c_3) \qquad \text{und} \qquad T_{B \leftarrow E_4} = T^{-1}_{E_4 \leftarrow B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^{-1}.$$

Statt die Inverse von $T_{E_4 \leftarrow B}$ zu berechnen, kann man auch die entsprechenden linearen Gleichungssysteme für die Spalten $s^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, von $T_{B \leftarrow E_4}$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

Damit ergibt sich die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Ähnlich lässt sich die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ mit Hilfe der Matrix $\tilde{A}$ bestimmen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Mit der alternativen Lösung aus Aufgabenteil b, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Alternative Lösung:
Aus der Definition der Abbildung und wegen $(b_1, b_2, b_3, b_4) =$ $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ sowie $(c_1, c_2, c_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ folgt,

$$\begin{aligned} \phi(b_1) &= \phi(e_1) = -e_2 - e_3 \\ \phi(b_2) &= \phi(e_1 + e_2) = \phi(e_1) + \phi(e_2) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ \phi(b_3) &= \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = 3e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_3) = e_1 - e_2 \\ \phi(b_4) &= \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) + \phi(e_4) = 3e_1 + 3e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_4) = 2e_2 \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Beziehungen, lässt sich dann analog zum Unterpunkt a.) die Matrix $[\phi(E_4)]_{E_3}$ bestimmen.

• **Aufgabe 3.** Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $V = (C[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei das Skalarprodukt und die Norm wie folgt definiert sind:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

a) (3 Punkte) Betrachten Sie einen Unteraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{1, 1+x\}$. Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des obigen Skalarproduktes mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt.

Wir gehen nach Schema des Gram-Schmidt-Verfahrens vor ($\tilde{w}_{1,2}$ seien die jeweils noch nicht normierten Vektoren und $w_{1,2}$ die normierten):

$$\tilde{w}_1(x) = 1, \qquad \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1\rangle = \int_0^1 1\,dx = x\,|_0^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1(x) = 1.$$

$$\tilde{w}_2(x) = 1 + x - \frac{\langle 1+x, 1\rangle}{1}\cdot 1 = 1 + x - \int_0^1 (1+x)\,dx = x - \tfrac{1}{2}.$$

$$\langle \tilde{w}_2, \tilde{w}_2\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{4})\,dx = \tfrac{1}{12}$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{12}\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion u von $v(x) = e^{2x} + x \in V$ auf den Unterraum U.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\langle v, w_1\rangle = \int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \tfrac{e^2}{2},$$

$$\langle v, w_2\rangle = \sqrt{12}\int_0^1 (e^{2x}x - \tfrac{1}{2}e^{2x} + x^2 - \tfrac{1}{2}x)\,dx = \frac{7}{\sqrt{12}}$$

$$\text{mit} \quad \int_0^1 xe^{2x}\,dx = \tfrac{x}{2}e^{2x}|_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\,dx.$$

Damit erhalten wir:

$$u(x) = \tfrac{e^2}{2} + 7\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$