

**LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)**

**2. Haupttest (MO, 18.01.2016) / Gruppe 3 (mit Lösung)**

— Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



- **Aufgabe 1.** Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum  $V = (C[1, 2], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , wobei das Skalarprodukt und die Norm wie folgt definiert sind:

$$\langle f, g \rangle := \int_1^2 f(x)g(x) dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

- a) (3 Punkte) Betrachten Sie einen Unterraum  $U$  von  $V$  mit der Basis  $B = \{b_1, b_2\} = \{1, x\}$ . Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des obigen Skalarproduktes mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt.

Wir gehen nach Schema des Gram-Schmidt-Verfahrens vor ( $\tilde{w}_{1,2}$  seien die jeweils noch nicht normierten Vektoren und  $w_{1,2}$  die normierten):

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x) &= 1, & \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1 \rangle &= \int_1^2 1 dx = x \Big|_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1(x) = 1. \\ \tilde{w}_2(x) &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{1} \cdot 1 = x - \int_1^2 x dx = x - \left( \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^2 \right) = x - \frac{3}{2}. \\ \langle \tilde{w}_2, \tilde{w}_2 \rangle &= \int_1^2 \left( x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \\ &\Rightarrow w_2(x) = \sqrt{12} \left( x - \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

- b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion  $u$  von  $v(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \in V$  auf den Unterraum  $U$ .

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \langle v, w_1 \rangle &= \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left( \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 + \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}, \\ \langle v, w_2 \rangle &= \int_1^2 \sqrt{12} \left( \frac{x}{x} - \frac{3}{2x} + \frac{x}{x^2} - \frac{3}{2x^2} \right) dx = \sqrt{12} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$u(x) = 3(1 - 2 \ln 2) \left( x - \frac{3}{2} \right) + \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

• **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Jordansche Normalform  $J$  und die dazugehörige Transformationsmatrix  $X$ . a): 5 P.

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)(5 - \lambda) + 4) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2, \quad n_1 = 1 = g_1,$$

$$\lambda_{2,3} = 3, \quad n_2 = 2, \quad 1 \leq g_2 \leq 2$$

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - \lambda_2 I) \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0. \text{ Für } s = 1 \text{ folgt}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\text{Rang}(A - \lambda_2 I) = 2$  gilt, gibt es nur einen Eigenvektor, d.h. es gibt einen Hauptvektor:

$$(A - \lambda_2 I) \mathbf{h}_2 = \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Für } t = 0$$

$$\text{folgt } \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_2) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = XJ$  ist erfüllt ✓

b) Ist  $A$  invertierbar? (Begründung reicht aus.)

b): 1 P.

$A$  ist invertierbar, da 0 kein Eigenwert von  $A$  ist.

• **Aufgabe 3.** Seien  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  und  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  Basen von  $\mathbb{R}^4$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ , welche durch die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

Sei die lineare Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch die Bilder der Basisvektoren der Basis  $B$  definiert

$$\phi(b_1) = c_1 + 3c_2 \quad \phi(b_2) = c_3 \quad \phi(b_3) = c_1 + c_2 + 2c_3 \quad \phi(b_4) = 2c_1 + c_3.$$

- a) (1 Punkt) Die lineare Abbildung  $\phi$  kann bezüglich der beiden Basen  $B$  und  $C$  mit Hilfe der Matrix  $[\phi(B)]_C := A$  dargestellt werden. Geben Sie diese Matrix an.

Wie direkt aus der Definition ersichtlich, lautet die gesuchte Matrix

$$[\phi(B)]_C = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Nun seien zwei weitere Basen  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$  und  $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3\}$ , mit den Basisvektoren

$$\tilde{b}_1 = b_1 \quad \tilde{b}_2 = b_2 + b_1 \quad \tilde{b}_3 = b_3 + b_2 + b_1 \quad \tilde{b}_4 = b_4 + b_3 + b_2 + b_1$$

und

$$\tilde{c}_1 = c_1 \quad \tilde{c}_2 = c_2 + c_1 \quad \tilde{c}_3 = c_3 + c_2 + c_1$$

definiert. Geben Sie die Matrixdarstellung der Abbildung  $\phi$  bezüglich der Basen  $\tilde{B}$  und  $\tilde{C}$ ,  $[\phi(\tilde{B})]_{\tilde{C}} := \tilde{A}$ , an.

Unter Verwendung von Satz 3.9 aus dem Vorlesungsskriptum gilt

$$\tilde{A} = [\phi(\tilde{B})]_{\tilde{C}} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} [\phi(B)]_C T_{\tilde{B} \leftarrow B}^{-1} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} [\phi(B)]_C T_{B \leftarrow \tilde{B}} = T_{\tilde{C} \leftarrow C} A T_{B \leftarrow \tilde{B}}.$$

Es müssen also die beiden Transformationsmatrizen  $T_{\tilde{C} \leftarrow C}$  und  $T_{B \leftarrow \tilde{B}}$  bestimmt werden. Die einzelnen Spaltenvektoren  $s^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , der Transformationsmatrix  $T_{B \leftarrow \tilde{B}}$  können simultan durch Lösen der Gleichungssysteme

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

bestimmt werden.

Gleiches Vorgehen wird für die Transformationsmatrix  $T_{\tilde{C} \leftarrow C}$  verwendet. Nach dem Lösen der Gleichungssysteme ergeben sich die Transformationsmatrizen

$$T_{\tilde{C} \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit deren Hilfe man die Darstellung der Abbildung  $\phi$  bzgl. der Basen  $\tilde{B}$  und  $\tilde{C}$  findet,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 3 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

**Eine Lösung mit den Basen  $\tilde{B}$  und  $\tilde{C}$  wie oben, mit Ausnahme von  $\tilde{b}_3 = b_1 + b_2 + b_3$  bzw.  $\tilde{c}_3 = c_1 + c_2 + c_3$  wird ebenfalls akzeptiert.**

Dabei ergeben sich die Transformationsmatrizen und die Matrix  $\tilde{A}$  zu

$$T_{\tilde{C} \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{B \leftarrow \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich den kanonischen Basen  $E_3$  und  $E_4$ ,  $[\phi(E_4)]_{E_3}$ . Sie können dabei die Matrix  $A$  (oder  $\tilde{A}$ ) verwenden oder direkt vorgehen.

*Das direkte Vorgehen spart Zeit.*

Die Matrix  $[\phi(E_4)]_{E_3}$  der Abbildung  $\phi$  bezüglich der Basen  $E_3$  und  $E_4$  kann mit Hilfe des Zusammenhangs

$$[\phi(E_4)]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow C} A T_{B \leftarrow E_4}$$

berechnet werden und es folgt,

$$T_{E_3 \leftarrow C} = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{und} \quad T_{B \leftarrow E_4} = T_{E_4 \leftarrow B}^{-1} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^{-1}.$$

Statt die Inverse von  $T_{E_4 \leftarrow B}$  zu berechnen, kann man auch die entsprechenden linearen Gleichungssysteme für die Spalten  $s^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , von  $T_{B \leftarrow E_4}$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)(s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, s^{(4)})$$

Damit ergibt sich die Matrix  $[\phi(E_4)]_{E_3}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Ähnlich lässt sich die Matrix  $[\phi(E_4)]_{E_3}$  mit Hilfe der Matrix  $\tilde{A}$  bestimmen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 3 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

**Mit der alternativen Lösung aus Aufgabenteil b, ergibt sich**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [\phi(E_4)]_{E_3}.$$

Alternative Lösung:

Aus der Definition der Abbildung und wegen  $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$  sowie  $(c_1, c_2, c_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$  folgt,

$$\begin{aligned} \phi(b_1) &= \phi(e_1) = 4e_1 + 3e_2 \\ \phi(b_2) &= \phi(e_1 + e_2) = \phi(e_1) + \phi(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_2) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 \\ \phi(b_3) &= \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = 4e_1 + 3e_2 + 2e_3 \Rightarrow \phi(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \phi(b_4) &= \phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) + \phi(e_4) = 3e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow \phi(e_4) = -e_1 - 2e_2 - e_3 \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Beziehungen, lässt sich dann analog zum Unterpunkt a.) die Matrix  $[\phi(E_4)]_{E_3}$  bestimmen.