Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2016

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 18.11.2016) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + (2p+5)x_3 &= 4, \\ x_1 + \qquad (p+1)x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + \ (2-p)x_3 &= -3. \end{aligned}$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2p+5 \\ 1 & 0 & p+1 \\ 1 & -1 & 2-p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Für welche Werte von p gibt es (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

Wir führen das Gaußverfahren für die erweiterte Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ durch, um den Rang zu bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2p+5 & 4 \\ 1 & 0 & p+1 & 1 \\ 1 & -1 & 2-p & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p+1 & 1 \\ 2 & 1 & 2p+5 & 4 \\ 1 & -1 & 2-p & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{z}_3 - \boldsymbol{z}_1]{\boldsymbol{z}_2 - 2\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p+1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1-2p & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{z}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & p+1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4-2p & -2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3\, \forall p \in \mathbb{R}$. Für $p = 2$ ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$, sonst ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$. Daher gilt:

(i) Für $p = 2$ gibt es keine Lösung.

(ii) Für $p \neq 2$ gibt es genau eine Lösung.

(iii) Es gibt kein p, so dass es unendlich viele Lösungen gibt.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Kern von A in Abhängigkeit von p.

Wir gehen vom Ergebnis des Gaußverfahrens in Punkt b) aus, lassen die Inhomogenität aber weg und lösen das homogene Problem. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1.) Für $p \neq 2$ hat die Matrix A vollen Rang, daher gilt in diesem Fall: $\mathrm{Kern}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

2.) Für $p = 2$ gilt $\mathrm{Rang}(A) = 2$, daher gibt es im Gegensatz zum inhomogenen Problem eine eindimensionale Lösungsschar.
2. Zeile: $x_2 + 3x_3 = 0$. Wir wählen $x_3 = -t$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $x_2 = 3t$.
1. Zeile: $x_1 + 3x_3 = 0$. Daher gilt $x_1 = x_2 = 3t$.

Für $p = 2$ gilt daher:

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- **Aufgabe 2.**

a) (3 Punkte) Gegeben sei ein Polynom $p(x)$ in der Lagrange-Basis in den Punkten x_1, x_2 und x_3.

$$[p(x)]_{LB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -5$$

Die Lagrange-Polynome lauten:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \quad L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Rechnen Sie das Polynom in die Monom-Basis $MB = \{1, x, x^2\}$ um.

Linearkombination als Ansatz: $p(x) = s_1 \cdot L_1(x) + s_2 \cdot L_2(x) + s_3 \cdot L_3(x)$

Wir können aus der Angabe ablesen, dass $s_1 = -4, s_2 = -6, s_3 = 5$. Wenn wir noch die Werte für x_1, x_2, x_3 in die Lagrange-Polynome einsetzen, können wir das gesuchte Polynom einfach ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}
p(x) &= -4 \cdot \tfrac{(x-3)(x+5)}{(1-3)(1+5)} - 6 \cdot \tfrac{(x-1)(x+5)}{(3-1)(3+5)} + 5 \cdot \tfrac{(x-1)(x-3)}{(-5-1)(-5-3)} \\
&= -4 \cdot \tfrac{x^2+2x-15}{-12} - 6 \cdot \tfrac{x^2+4x-5}{16} + 5 \cdot \tfrac{x^2-4x+3}{48} \\
&= \tfrac{x^2+2x-15}{3} - 3 \cdot \tfrac{x^2+4x-5}{8} + 5 \cdot \tfrac{x^2-4x+3}{48} \\
&= x^2(\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{48}) + x(\tfrac{2}{3} - \tfrac{12}{8} - \tfrac{20}{48}) + (-\tfrac{15}{3} + \tfrac{15}{8} + \tfrac{15}{48}) \\
&= \tfrac{1}{16}x^2 - 1\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{13}{16} \\
&= \tfrac{1}{16}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{45}{16}
\end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Gegeben seien folgende Polynome:

$$\boxed{p_1(x) = x^2 + 5x, \quad p_2(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad p_3(x) = 6x - 4}$$

Untersuchen Sie die lineare (Un-)Abhängigkeit.
Im Falle linearer Unabhängigkeit: Geben Sie eine Basis des Raumes der Polynome vom Grad $n \leq 2$ an. Welche Dimension müsste eine solche Basis besitzen? (Begründung!)

Linearkombination als Ansatz: $s_1 \cdot p_1(x) + s_2 \cdot p_2(x) + s_3 \cdot p_3(x) = 0$

einsetzen und umsortieren ergibt: $(s_1 + 3s_2)x^2 + (5s_1 - 2s_2 + 6s_3)x + (s_2 - 4s_3) = 0$

Lösen mit z.B. Koeffizientenvergleich (auch über Rang oder Vektorschreibweise möglich):

$$\begin{aligned} s_1 + 3s_2 &= 0 \rightarrow s_1 = -3s_2 \\ 5s_1 - 2s_2 + 6s_3 &= 0 \\ s_2 - 4s_3 &= 0 \rightarrow s_3 = \frac{1}{4}s_2 \end{aligned}$$

Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$ $\Rightarrow$ $p_{1,2,3}$ sind linear unabhängig

ad Basis und Dimension:

$P_2 = \mathcal{L}\{x^2 + 5x, 3x^2 - 2x + 1, 6x - 4\} \quad \rightarrow \quad dim(P_2) = 3$

Die Dimension muss drei sein, weil der Raum der Polynome vom Grad $n \leq 2$ drei Basispolynome braucht, um die Fälle x^0, x^1 und x^2 darzustellen.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sind die folgenden vier Mengen:

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 = 0, x_1 + 2x_4 = 0\}$$

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_4 = -\sqrt{5}\}$$

$$\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0\}$$

$$\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 - 5x_2 + \sqrt{5} = -\sqrt{5}\}$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}$ und $\mathbb{U}$ Unterräume des $\mathbb{R}^4$ sind. Warum sind $\mathbb{T}$ und $\mathbb{V}$ keine Unterräume von $\mathbb{R}^4$? **Begründen** Sie die Entscheidung!

$\mathbb{U}$ ist nach dem Unterraumkriterium (Satz 1.2) UR von $\mathbb{R}^4$, denn
(1) für $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$ gilt:

$$x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0$$

und

$$y_1 - y_2 + y_4 = 0, y_3 = 0$$

Damit folgt für $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$:

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4) = (x_1 - x_2 + x_4) + (y_1 - y_2 + y_4) = 0 + 0 = 0$$

und daher $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathbb{U}$.
(2) Sei nun $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$, dann gilt für $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$

$$c \cdot x_1 - c \cdot x_2 + c \cdot x_4 = c \cdot (x_1 - x_2 + x_4) = c \cdot 0 = 0$$

und somit $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$. $\mathbb{U}$ ist somit nach Unterraumkriterium Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

Analoges Vorgehen zeigt, dass $\mathbb{S}$ ebenfalls Unterraum ist.

Für $\mathbb{T}$ bzw. $\mathbb{V}$ gilt hingegen: $0 \notin \mathbb{T}$ bzw. $0 \notin \mathbb{V}$. Damit sind $\mathbb{T}$ und $\mathbb{V}$ keine Unterräume.

b) (2 Punkte) Finden Sie für jeden in a) gefundenen Unterraum eine Basis. Geben Sie jeweils auch die Dimension des Unterraums an.

Aus den beiden für $\mathbb{S}$ gegebenen Gleichungen folgt: $x_2 = \frac{x_1}{2}$ und $x_4 = \frac{-x_1}{2}$ und damit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1/2 \cdot x_1 \\ x_3 \\ -1/2 \cdot x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{x_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\tilde{x_1} = \frac{1}{2} \cdot x_1$ gesetzt wurde.
Damit lautet die Basis von $\mathbb{S}$:

$$B_S = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

und daher

$$dim(\mathbb{S}) = 2$$

Analoges Vorgehen für $\mathbb{U}$ liefert:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Basis von $\mathbb{U}$:

$$B_U = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

und daher

$$dim(\mathbb{U}) = 2$$

.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Summe von $\mathbb{S}$ und $\mathbb{U}$, $\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{U}$. Zeigen Sie, dass dies keine direkte Summe ist, das heißt, dass der Durchschnitt von $\mathbb{S}$ und $\mathbb{U}$ nicht leer ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension von $\mathbb{W}$ an. Nachdem $\mathbb{W} \neq \mathbb{R}^4$ gilt, ergänzen Sie die Basis von $\mathbb{W}$ durch einen oder mehrere Vektoren so, dass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht.

$$\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{U}$$

Nun versuchen wir herauszufinden, ob $\mathbb{S} \cap \mathbb{U} = \{\emptyset\}$. Sei dazu $\mathbf{x} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{U}$, d.h. $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$. Dann gilt:

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man $a = 2 \cdot c$, $b = c$, $d = 0$ und $-a + b = -c$. Setzt man etwa $c = 1$, so erhält man

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{U} = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

Damit ist

$$dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{U}) = 1$$

Nach dem Dimensionssatz für Unterräume (Satz 1.12) gilt:

$$dim(\mathbb{S} + \mathbb{U}) = dim(\mathbb{S}) + dim(\mathbb{U}) - dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{U}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Wir haben bereits $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dargestellt, der Vektor ist also linear abhängig von den beiden anderen. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von den den Basisvektoren von $\mathbb{U}$ offensichtlich linear unabhängig ist, lautet die Basis von $\mathbb{S} + \mathbb{U}$:

$$B_{S+U} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Da $dim(\mathbb{W}) = dim(\mathbb{S} + \mathbb{U}) = 3$ kann dies nicht Basis von $\mathbb{R}^4$ sein. Eine Basis des $\mathbb{R}^4$ wäre beispielsweise:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{B_{S+U} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

d) (1 Punkt) Schreiben Sie die in c) erhaltenen Basisvektoren des $\mathbb{R}^4$ spaltenweise in eine 4x4-Matrix. Welchen Rang hat die Matrix? **Interpretieren** Sie das Ergebnis!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{el. Umformungen} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $Rang(A) = 4$. Da es sich um vier Basisvektoren in den Spalten handelt, die bekanntermaßen linear unabhängig sind, ist der Rang der Matrix selbstverständlich voll.