

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 18.11.2016) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|-----------------------|------------------|-----------------------------|
| | | |
| ↑ <i>FAMILIENNAME</i> | ↑ <i>Vorname</i> | ↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i> |

| | | | |
|---------------|-----------|-----------|----------------------|
| <i>1.</i> | <i>2.</i> | <i>3.</i> | <i>gesamt</i> |
| | | | <input type="text"/> |
| <i>Punkte</i> | | | <i>maximal 18</i> |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sind die folgenden vier Mengen:

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_3 = 0\}$$

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_2 - 2x_4 + 7 = -1\}$$

$$\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

$$\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \frac{4}{6}x_1 + x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 2 = 0\}$$

- a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass \mathbb{S} und \mathbb{U} Unterräume des \mathbb{R}^4 sind. Warum sind \mathbb{T} und \mathbb{V} keine Unterräume von \mathbb{R}^4 ? **Begründen** Sie die Entscheidung!

\mathbb{U} ist nach dem Unterraumkriterium (Satz 1.2) UR von \mathbb{R}^4 , denn

(1) für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ gilt:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, x_4 = 0$$

und

$$2y_1 - y_2 + 2y_3 = 0, y_4 = 0$$

Damit folgt für $\mathbf{x} + \mathbf{y}$:

$$(2x_1 + 2y_1) - (x_2 + y_2) + (2x_3 + 2y_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3) + (2y_1 - y_2 + 2y_3) = 0 + 0 = 0$$

und daher $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{U}$.

(2) Sei nun $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$, dann gilt für $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$

$$\mathbf{c} \cdot 2x_1 - \mathbf{c} \cdot x_2 + \mathbf{c} \cdot 2x_3 = \mathbf{c} \cdot (2x_1 - x_2 + 2x_3) = \mathbf{c} \cdot 0 = 0$$

und somit $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{U}$. \mathbb{U} ist somit nach Unterraumkriterium Unterraum von \mathbb{R}^4 .

Analoges Vorgehen zeigt, dass \mathbb{S} ebenfalls Unterraum ist.

Für \mathbb{T} bzw. \mathbb{V} gilt hingegen: $\mathbf{0} \notin \mathbb{T}$ bzw. $\mathbf{0} \notin \mathbb{V}$. Damit sind \mathbb{T} und \mathbb{V} keine Unterräume.

- b) (2 Punkte) Finden Sie für jeden in a) gefundenen Unterraum eine Basis. Geben Sie jeweils auch die Dimension des Unterraums an.

Aus den beiden für \mathbb{S} gegebenen Gleichungen folgt: $x_1 = x_2$ und $x_3 = \frac{-x_1}{2}$
und damit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -1/2 \cdot x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{x}_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1$ gesetzt wurde.

Damit lautet die Basis von \mathbb{S} :

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und daher

$$\dim(\mathbb{S}) = 2$$

Analoges Vorgehen für \mathbb{U} liefert:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Basis von \mathbb{U} :

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und daher

$$\dim(\mathbb{U}) = 2$$

.

- c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Summe von \mathbb{S} und \mathbb{U} , $\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{U}$. Zeigen Sie, dass dies keine direkte Summe ist, das heißt, dass der Durchschnitt von \mathbb{S} und \mathbb{U} nicht leer ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension von \mathbb{W} an. Nachdem $\mathbb{W} \neq \mathbb{R}^4$ gilt, ergänzen Sie die Basis von \mathbb{W} durch einen oder mehrere Vektoren so, dass eine Basis des \mathbb{R}^4 entsteht.

$$\mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{U}$$

Nun versuchen wir herauszufinden, ob $\mathbb{S} \cap \mathbb{U} = \{\emptyset\}$. Sei dazu $\mathbf{x} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{U}$, d.h. $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$. Dann gilt:

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man $2 = c$, $2 \cdot a = 2 \cdot c + 2 \cdot d$, $-a = -d$ und $b = 0$. Setzt man etwa $a = 1$, so erhält man

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{U} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ist

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{U}) = 1$$

Nach dem Dimensionssatz für Unterräume (Satz 1.12) gilt:

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{U}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{U}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{U}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Wir haben bereits $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt,

der Vektor ist also linear abhängig von den beiden anderen. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von den den

Basisvektoren von \mathbb{U} offensichtlich linear unabhängig ist, lautet die Basis von $\mathbb{S} + \mathbb{U}$:

$$B_{\mathbb{S}+\mathbb{U}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da $\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{S} + \mathbb{U}) = 3$ kann dies nicht Basis von \mathbb{R}^4 sein. Eine Basis des \mathbb{R}^4 wäre beispielsweise:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ B_{\mathbb{S}+\mathbb{U}} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- d) (1 Punkt) Schreiben Sie die in c) erhaltenen Basisvektoren des \mathbb{R}^4 spaltenweise in eine 4x4-Matrix. Welchen Rang hat die Matrix? **Interpretieren** Sie das Ergebnis!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{el. Umformungen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\text{Rang}(A) = 4$. Da es sich um vier Basisvektoren in den Spalten handelt, die bekanntermaßen linear unabhängig sind, ist der Rang der Matrix selbstverständlich voll.

• **Aufgabe 2.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + (3p - 5)x_3 &= -1, \\x_1 + x_2 + (2p - 4)x_3 &= -1, \\-x_1 + (8 - 2p)x_3 &= 4.\end{aligned}$$

a) (1 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des Gleichungssystems an.

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3p - 5 \\ 1 & 1 & 2p - 4 \\ -1 & 0 & 8 - 2p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$. Für welche Werte von p gibt es (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

Wir führen das Gaußverfahren für die erweiterte Matrix $(A|\mathbf{b})$ durch, um den Rang zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3p - 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2p - 4 & -1 \\ -1 & 0 & 8 - 2p & 4 \end{array} \right) &\xrightarrow{z_1 \leftrightarrow z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2p - 4 & -1 \\ 2 & 3 & 3p - 5 & -1 \\ -1 & 0 & 8 - 2p & 4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{z_2 - 2z_1 \\ z_3 + z_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2p - 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 - p & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{z_3 - z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2p - 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 - p & 1 \\ 0 & 0 & p + 1 & 2 \end{array} \right)\end{aligned}$$

$\text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3 \forall p \in \mathbb{R}$. Für $p = -1$ ist $\text{Rang}(A) = 2$, sonst ist $\text{Rang}(A) = 3$. Daher gilt:

- (i) Für $p = -1$ gibt es keine Lösung.
- (ii) Für $p \neq -1$ gibt es genau eine Lösung.
- (iii) Es gibt kein p , so dass es unendlich viele Lösungen gibt.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Kern von A in Abhängigkeit von p .

Wir gehen vom Ergebnis des Gaußverfahrens in Punkt b) aus, lassen die Inhomogenität aber weg und lösen das homogene Problem. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1.) Für $p \neq -1$ hat die Matrix A vollen Rang, daher gilt in diesem Fall: $\text{Kern}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

2.) Für $p = -1$ gilt $\text{Rang}(A) = 2$, daher gibt es im Gegensatz zum inhomogenen Problem eine eindimensionale Lösungsschar.

2. Zeile: $x_2 + 4x_3 = 0$. Wir wählen $x_3 = t$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $x_2 = -4t$.

1. Zeile: $x_1 + x_2 - 6x_3 = 0$. Daher gilt $x_1 = -x_2 + 6x_3 = 10t$.

Für $p = -1$ gilt daher:

$$\text{Kern}(A) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

• **Aufgabe 3.**

a) (3 Punkte) Gegeben sei ein Polynom $p(x)$ in der Lagrange-Basis in den Punkten x_1, x_2 und x_3 .

$$[p(x)]_{LB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 8, x_2 = 3, x_3 = -1$$

Die Lagrange-Polynome lauten:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Rechnen Sie das Polynom in die Monom-Basis $MB = \{1, x, x^2\}$ um.

Linearkombination als Ansatz: $p(x) = s_1 \cdot L_1(x) + s_2 \cdot L_2(x) + s_3 \cdot L_3(x)$

Wir können aus der Angabe ablesen, dass $s_1 = 5, s_2 = -2, s_3 = 2$. Wenn wir noch die Werte für x_1, x_2, x_3 in die Lagrange-Polynome einsetzen, können wir das gesuchte Polynom einfach ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} p(x) &= 5 \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{(8-3)(8+1)} - 2 \cdot \frac{(x-8)(x+1)}{(3-8)(3+1)} + 2 \cdot \frac{(x-8)(x-3)}{(-1-8)(-1-3)} \\ &= 5 \cdot \frac{x^2-2x-3}{45} - 2 \cdot \frac{x^2-7x-8}{-20} + 2 \cdot \frac{x^2-11x+24}{36} \\ &= \frac{x^2-2x-3}{9} + \frac{x^2-7x-8}{10} + \frac{x^2-11x+24}{18} \\ &= x^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} \right) + x \left(-\frac{2}{9} - \frac{7}{10} - \frac{11}{18} \right) + \left(-\frac{3}{9} - \frac{8}{10} + \frac{24}{18} \right) \\ &= \frac{4}{15}x^2 - 1\frac{8}{15}x + \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{15}x^2 - \frac{23}{15}x + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

b) (3 Punkte) Gegeben seien folgende Polynome:

$$p_1(x) = x^2 - 3x, \quad p_2(x) = 4x^2 - 9x + 3, \quad p_3(x) = 5x - 6$$

Untersuchen Sie die lineare (Un-)Abhängigkeit.

Im Falle linearer Unabhängigkeit: Geben Sie eine Basis des Raumes der Polynome vom Grad $n \leq 2$ an. Welche Dimension müsste eine solche Basis besitzen? (Begründung!)

Linearkombination als Ansatz: $s_1 \cdot p_1(x) + s_2 \cdot p_2(x) + s_3 \cdot p_3(x) = 0$

einsetzen und umsortieren ergibt: $(s_1 + 4s_2)x^2 + (-3s_1 - 9s_2 + 5s_3)x + (3s_2 - 6s_3) = 0$

Lösen mit z.B. Koeffizientenvergleich (auch über Rang oder Vektorschreibweise möglich):

$$\begin{aligned} s_1 + 4s_2 &= 0 \rightarrow s_1 = -4s_2 \\ -3s_1 - 9s_2 + 5s_3 &= 0 \\ 3s_2 - 6s_3 &= 0 \rightarrow s_3 = \frac{3}{6}s_2 = \frac{1}{2}s_2 \end{aligned}$$

Gleichungssystem lösen $\rightarrow s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0 \Rightarrow p_{1,2,3}$ sind linear unabhängig
ad Basis und Dimension:

$$P_2 = \mathcal{L}\{x^2 - 3x, 4x^2 - 9x + 3, 5x - 6\} \rightarrow \dim(P_2) = 3$$

Die Dimension muss drei sein, weil der Raum der Polynome vom Grad $n \leq 2$ drei Basispolynome braucht, um die Fälle x^0, x^1 und x^2 darzustellen.