Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2016

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (FR, 20.01.2017) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ∘

- **Aufgabe 1.** Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass A einen einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und einen doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 3$ hat, indem Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen.

Wir bestimmen das charakteristische Polynom: $\det(A - \lambda I) = -\lambda(9 - 6\lambda + \lambda^2) \stackrel{!}{=} 0$. Für die Eigenwerte ergeben sich damit $\lambda_1 = 0$ mit der algebraischen Vielfachheit 1 und mittels quadratischer Lösungsformel $\lambda_2 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit 2.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J und die zugehörige Transformationsmatrix X.

Berechnung der Eigenvektoren und etwaiger Hauptvektoren:

$$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

λ_2 hat geometrische Vielfachheit 1, aber algebraische Vielfachheit 2 $\Rightarrow \exists$ Hauptvektor $\boldsymbol{h}_2$:

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen (beispielsweise) $t = 0$ und erhalten damit $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aus den Eigenwerten und Eigen- und Hauptvektoren ergeben sich

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe 2.**

a) Betrachten Sie einen euklidischen Vektorraum V, in dem das innere Produkt und die Norm wie folgt definiert sind:

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{0} f(x)\cdot g(x)\cdot e^x\ dx, \quad \| f \| = \sqrt{\langle f, f\rangle}}$$

Betrachten Sie den Unterraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{x+4,\ 2x+\frac{3}{2}\}$. Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des oben definierten Skalarproduktes mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen seien hier einige Integrale aufgeführt:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} e^x\ dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x\ dx = -1, \qquad \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^x\ dx = 2, \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3\cdot e^x\ dx = -6.}$$

a): 3 P.

$u_1 := b_1 = x+4$

$u_2 = b_2 - \frac{\langle u_1, b_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\cdot u_1 = (2x+\frac{3}{2}) - \frac{\langle x+4,\ 2x+\frac{3}{2}\rangle}{\langle x+4,\ x+4\rangle}\cdot(x+4)$

$$\langle u_1, b_2\rangle = \langle x+4,\ 2x+\frac{3}{2}\rangle = \int_{-\infty}^{0}(x+4)\cdot(2x+\frac{3}{2})\cdot e^x\ dx = \int_{-\infty}^{0} 2x^2\cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0}\frac{19}{2}x\cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} 6\cdot e^x\ dx$$

$$= 2\cdot 2 + \frac{19}{2}\cdot(-1) + 6\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\langle u_1, u_1\rangle = \langle x+4,\ x+4\rangle = \int_{-\infty}^{0}(x+4)^2\cdot e^x\ dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} 8x\cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} 16\cdot e^x\ dx$$

$$= 1\cdot 2 + 8\cdot(-1) + 16 = 10$$

$u_2 = (2x+\frac{3}{2}) - \frac{\frac{1}{2}}{10}\cdot(x+4) = x(2-\frac{1}{20}) + (\frac{3}{2}-\frac{4}{20}) = \frac{39}{20}x + \frac{13}{10} = \frac{13}{20}(3x+2)$

Die Orthogonalbasis ist demnach gegeben durch $B_{OGB} = \{u_1, u_2\} = \{x+4,\ \frac{13}{20}(3x+2)\}$. Um die Orthonormalbasis $B_{ONB} = \{w_1, w_2\}$ zu erhalten, muss noch normiert werden:

$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{x+4}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x+4), \qquad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$$\langle u_2, u_2\rangle = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{13(3x+2)}{20}\right)^2 \cdot e^x \ dx = \frac{169}{400}\left[\int_{-\infty}^{0} 9x^2 \cdot e^x \ dx + \int_{-\infty}^{0} 12x \cdot e^x \ dx + \int_{-\infty}^{0} 4 \cdot e^x \ dx\right]$$

$$= \tfrac{169}{400}\left[9 \cdot 2 + 12 \cdot (-1) + 4 \cdot 1\right] = \tfrac{169}{400} \cdot 10 = \tfrac{169}{40}$$

$w_2 = \frac{13}{20}(3x+2) \cdot \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{169}} = \frac{13}{20}(3x+2) \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{13} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x+2)$

$$\implies B_{ONB} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(x+4),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(3x+2)\right\}$$

b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $s(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \in V$ auf den Unterraum U. *b): 3 P.*

Die Orthogonalprojektion m berechnet sich wie folgt: $m = \langle s, w_1\rangle \cdot w_1 + \langle s, w_2\rangle \cdot w_2$

$m = \langle \frac{1}{2}(x^2-1),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(x+4)\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(x+4) + \langle \frac{1}{2}(x^2-1),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(3x+2)\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(3x+2)$

$$\langle s, w_1\rangle = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(x+4)\right) \cdot e^x \ dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot e^x \ dx + 4\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^x \ dx - \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \ dx - 4\int_{-\infty}^{0} e^x \ dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot ((-6) + 4 \cdot 2 - (-1) - 4) = \tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{10}}$$

$$\langle s, w_2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3x+2)\right) \cdot e^x \; dx$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{10}} \cdot \left[3\int\limits_{-\infty}^{0} x^3 \cdot e^x \; dx + 2\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^x \; dx - 3\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \; dx - 2\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \; dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{10}}(3\cdot(-6) + 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) - 2) = \tfrac{1}{2\cdot\sqrt{10}} \cdot (-13) = -\tfrac{13}{2\cdot\sqrt{10}}$$

$$m = -\tfrac{1}{2\cdot\sqrt{10}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}}(x+4) - \tfrac{13}{2\cdot\sqrt{10}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3x+2) = -\tfrac{1}{20}(x+4) - \tfrac{13}{20}(3x+2) = -\tfrac{40}{20}x - \tfrac{30}{20}$$

$$\Longrightarrow m = -2x - \frac{3}{2}$$

c) Zusatzfrage: Wie würde die Orthogonalprojektion von $s(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \in V$ (*siehe b*) auf den Unterraum $W = \{1,\ x\}$ aussehen? (Begründung, keine Rechnung!) *c): 1 ZusatzP.*

Der Unterraum U aus Unterpunkt a) ist genauso ein Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 1 wie der Unterraum W. Deswegen wird die Orthogonalprojektion dasselbe Ergebnis liefern, d.h.:

$$OGP = -2x - \tfrac{3}{2}$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben seien die Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, sowie die kanonische Basis $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

gilt.

Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch die Bilder der Basisvektoren von B definiert,

$$\phi(b_1) = b_1 + 2\,b_2 \quad \phi(b_2) = b_1 + b_3 \quad \phi(b_3) = 2\,b_2 + 3\,b_3.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B zu E_3, $T_{E_3 \leftarrow B}$, sowie die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von E_3 zu B, $T_{B \leftarrow E_3}$.

Die Transformationsmatrizen erhält man indem man die Vektoren der alten Basis bezüglich der neuen Basis darstellt. Dazu muss man drei lineare Gleichungssysteme simultan lösen.

Handelt es sich bei der neuen Basis um die kanonische Basis E_3, so ist das Gleichungssystem trivial und man erhält die Transformationsmatrix direkt aus B,

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Um die Matrix $T_{B \leftarrow E_3}$ zu erhalten, löst man die drei unterstehenden linearen Systeme, was dem Invertieren von $T_{E_3 \leftarrow B}$ gleich kommt,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Damit erhalten wir

$$T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\2 & -1 & 1\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\phi(E_3)]_{E_3}$ der Abbildung ϕ bezüglich der Basis E_3. Beachten Sie, dass man die Matrix $[\phi(B)]_B$ leicht angeben kann!

Aus der Angabe ist ersichtlich, dass

$$[\phi(B)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt und damit (nach Satz 3.9 aus dem Skriptum)

$$[\phi(E_3)]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow B} \cdot [\phi(B)]_B \cdot T_{B \leftarrow E_3}$$

folgt. Durch Einsetzen der bisherigen Ergebnisse und Matrixmultiplikation, erhalten wir

$$[\phi(E_3)]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 20 & 10 \\ 2 & 9 & 16 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

c) (1 Punkt) Gegeben sei $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stellen Sie v bezüglich der Basis E_3 dar, d.h. berechnen Sie $[v]_{E_3}$. Verwenden Sie $[v]_{E_3}$, um $[\phi(v)]_{E_3}$ anzugeben.

Es gilt

$$[v]_{E_3} = T_{E_3 \leftarrow B} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$[\phi(v)]_{E_3} = [\phi(E_3)]_{E_3} \cdot [v]_{E_3} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 20 & 10 \\ 2 & 9 & 16 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d) (1 Punkt) Welche Beziehung gilt zwischen der Matrix $T_{E_3 \leftarrow B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Matrizen $I_3 = [e_1\, e_2\, e_3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathcal{B} = [b_1\, b_2\, b_3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$? Was folgt daraus für die Determinante von $T_{E_3 \leftarrow B}$? Berechnen Sie die Determinante von $T_{E_3 \leftarrow B}$ und untermauern Sie damit Ihre obige Schlussfolgerung.

Es gilt

$$I_3\, T_{E_3 \leftarrow B} = \mathcal{B} \Leftrightarrow T_{E_3 \leftarrow B} = \mathcal{B}$$

und da $\operatorname{Det} \mathcal{B} \neq 0$ und $\operatorname{Det} I_3 \neq 0$ gilt, ist auch $\operatorname{Det} T_{E_3 \leftarrow B} \neq 0$.
Nachrechnen zeigt, dass

$$\operatorname{Det} T_{E_3 \leftarrow B} = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -5$$

und damit tatsächlich ungleich Null.