LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (MO, 20.01.2017) / Gruppe 1 *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.** Gegeben seien die Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, sowie die kanonische Basis $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Sei weiterhin die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Basisvektoren von B definiert

$$\phi(b_1) = 2 \cdot b_1 + b_3 \qquad \phi(b_2) = 2 \cdot b_1 + b_2 \qquad \phi(b_3) = 2 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von B zu E_3, $T_{E_3 \leftarrow B}$, sowie die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von E_3 zu B, $T_{B \leftarrow E_3}$.

Die Transformationsmatrizen erhält man durch Darstellen der Basisvektoren durch die jeweils anderen und Lösen des Gleichungssystems.

Handelt es sich bei der Zielbasis um die kanonische Basis E, so ist das Gleichungssystem trivial und man erhält die Transformationsmatrix

$$T_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $T_{B \leftarrow E}$ erhält man beispielsweise durch Invertieren von $T_{E \leftarrow B}$, also durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet

$$T_{E \leftarrow B} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.

.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung ϕ bezüglich der Basis E. Beachten Sie, dass man die Matrix $[\phi(B)]_B$ leicht angeben kann!

Wie aus der Angabe ersichtlich ist, lautet

$$[\phi(B)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.9 aus dem Skriptum gilt:

$$[\phi(E)]_E = T_{E \leftarrow B} \cdot [\phi(B)]_B \cdot T_{B \leftarrow E}$$

Damit erhält man durch Einsetzen der bisherigen Ergebnisse und Matrixmultiplikation:

$$[\phi(E)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 11 & -14 & 9 \end{pmatrix}$$

.

c) (1 Punkt) Gegeben sei $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stellen Sie v bezüglich der Basis E dar und verwenden Sie diese Darstellung, um $[\phi(v)]_E$ zu berechnen.

Es gilt:

$$[v]_E = T_{E \leftarrow B} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Und weiterhin:

$$[\phi(v)]_E = [\phi(E)]_E \cdot [v]_E = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 11 & -14 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 24 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

.

d) (1 Punkt) Welche Abbildung stellt $T_{E \leftarrow B}$ dar? Was folgt daraus zwangsläufig für deren Determinante? Berechnen Sie die Determinante von $T_{E \leftarrow B}$ und untermauern Sie damit Ihre Schlussfolgerungen.

$T_{E \leftarrow B}$ ist Darstellungsmatrix der identischen Abbildung bezüglich den Basen B bzw. E. Die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung hat bezüglich der kanonischen Basis vollen Rang, demnach hat sie in jeder Basisdarstellung vollen Rang, weshalb die Determinante ungleich 0 sein muss.
Nachrechnen zeigt, dass

$$det(T_{E \leftarrow B}) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4$$

und damit tatsächlich ungleich 0.

- **Aufgabe 2.** Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass A einen einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ und einen doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 2$ hat, indem Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen.

Wir bestimmen das charakteristische Polynom: $\det(A - \lambda I) = -\lambda(4 - 4\lambda + \lambda^2) \stackrel{!}{=} 0$. Für die Eigenwerte ergeben sich damit $\lambda_1 = 0$ mit der algebraischen Vielfachheit 1 und mittels quadratischer Lösungsformel $\lambda_2 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit 2.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J und die zugehörige Transformationsmatrix X.

Berechnung der Eigenvektoren und etwaiger Hauptvektoren:

$$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

λ_2 hat geometrische Vielfachheit 1, aber algebraische Vielfachheit 2 $\Rightarrow \exists$ Hauptvektor $\boldsymbol{h}_2$:

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen (beispielsweise) $t = 0$ und erhalten damit $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus den Eigenwerten und Eigen- und Hauptvektoren ergeben sich

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe 3.**

a) Betrachten Sie einen euklidischen Vektorraum V, in dem das innere Produkt und die Norm wie folgt definiert sind:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot g(x) \cdot e^x \; dx, \quad \| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Betrachten Sie den Unterraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{2x+1,\ 3x+\frac{3}{4}\}$. Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des oben definierten Skalarproduktes mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen seien hier einige Integrale aufgeführt:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \; dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \; dx = -1, \qquad \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^x \; dx = 2, \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot e^x \; dx = -6.$$

a): 3 P.

$u_1 := b_1 = 2x + 1$

$u_2 = b_2 - \frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 = (3x + \frac{3}{4}) - \frac{\langle 2x+1,\ 3x+\frac{3}{4} \rangle}{\langle 2x+1,\ 2x+1 \rangle} \cdot (2x + 1)$

$$\langle u_1, b_2 \rangle = \langle 2x+1,\ 3x+\frac{3}{4} \rangle = \int_{-\infty}^{0} (2x+1) \cdot (3x+\frac{3}{4}) \cdot e^x \; dx = \int_{-\infty}^{0} 6x^2 \cdot e^x \; dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{9}{2} x \cdot e^x \; dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{3}{4} \cdot e^x \; dx$$

$$= 6 \cdot 2 + \tfrac{9}{2} \cdot (-1) + \tfrac{3}{4} \cdot 1 = \tfrac{33}{4}$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle 2x + 1,\ 2x + 1 \rangle = \int_{-\infty}^{0} (2x + 1)^2 \cdot e^x \; dx = \int_{-\infty}^{0} 4x^2 \cdot e^x \; dx + \int_{-\infty}^{0} 4x \cdot e^x \; dx + \int_{-\infty}^{0} e^x \; dx$$

$$= 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 5$$

$u_2 = (3x + \frac{3}{4}) - \frac{\frac{33}{4}}{5} \cdot (2x + 1) = x(3 - \frac{2 \cdot 33}{20}) + (\frac{3}{4} - \frac{33}{20}) = -\frac{3}{10}x - \frac{9}{10}$

Die Orthogonalbasis ist demnach gegeben durch $B_{OGB} = \{u_1, u_2\} = \{2x+1,\ -\frac{3}{10}(x+3)\}$.
Um die Orthonormalbasis $B_{ONB} = \{w_1, w_2\}$ zu erhalten, muss noch normiert werden:

$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{2x+1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+1), \qquad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$$\langle u_2, u_2\rangle = \int_{-\infty}^{0} \left(-\frac{3(x+3)}{10}\right)^2 \cdot e^x\ dx = \frac{9}{100}\left[\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} 6x \cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} 9 \cdot e^x\ dx\right]$$

$$= \frac{9}{100}\left[2 + 6\cdot(-1) + 9\cdot 1\right] = \frac{9}{100}\cdot 5 = \frac{9}{20}$$

$w_2 = -\frac{3}{10}(x+3)\cdot\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} = -\frac{3}{10}(x+3)\cdot\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(x+3)$

$$\Longrightarrow B_{ONB} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+1),\ -\frac{1}{\sqrt{5}}(x+3)\right\}$$

b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $s(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \in V$ auf den Unterraum U. *b): 3 P.*

Die Orthogonalprojektion m berechnet sich wie folgt: $m = \langle s, w_1\rangle \cdot w_1 + \langle s, w_2\rangle \cdot w_2$

$m = \langle \frac{1}{2}(x^2-1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+1)\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+1) + \langle \frac{1}{2}(x^2-1),\ \frac{-1}{\sqrt{5}}(x+3)\rangle \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}}(x+3)$

$$\langle s, w_1\rangle = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+1)\right)\cdot e^x\ dx$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\left[2\int_{-\infty}^{0} x^3\cdot e^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot e^x\ dx - 2\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x\ dx - \int_{-\infty}^{0} e^x\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot(2\cdot(-6) + 2 - 2\cdot(-1) - 1) = -\frac{9}{2\cdot\sqrt{5}}$$

$$\langle s, w_2 \rangle = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}(x+3)\right) \cdot e^x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot e^x \, dx + 3 \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^x \, dx - \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx - 3 \int_{-\infty}^{0} e^x \, dx\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{5}}(-6 + 3 \cdot 2 - (-1) - 3 \cdot 1) = -\tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot (-2) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

$$m = -\tfrac{9}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2x+1) - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(x+3) = -\tfrac{9}{10}(2x+1) - \tfrac{2}{10}(x+3) = -\tfrac{20}{10}x - \tfrac{15}{10}$$

$$\Longrightarrow m = -2x - \frac{3}{2}$$

c) Zusatzfrage: Wie würde die Orthogonalprojektion von $s(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \in V$ (*siehe b*) auf den Unterraum $W = \{1,\ x\}$ aussehen? (Begründung, keine Rechnung!) *c): 1 ZusatzP.*

Der Unterraum U aus Unterpunkt a) ist genauso ein Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 1 wie der Unterraum W. Deswegen wird die Orthogonalprojektion dasselbe Ergebnis liefern, d.h.:

$$OGP = -2x - \tfrac{3}{2}$$