Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2017

# LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

**2. Haupttest (FR, 19.01.2018)** *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| 1. | 2. | 3. | gesamt |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Punkte | | | maximal 18 |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** •

- **Aufgabe 1.**

Betrachten Sie $V$, den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq 2$, in dem das innere Produkt und die Norm wiefolgt definiert sind:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\ dx, \quad \| f \| := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

a ) (3 Punkte) Betrachten Sie den Unterraum $U$ von $V$ mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{x+1,\ x^2+x\}$. Orthonormieren Sie diese Basis bezüglich des oben definierten Skalarproduktes mithilfe des Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahrens.

Die Notation soll im Folgenden jener aus der Übung folgen - die orthogonalen Basisvektoren werden mit $w_i$ bezeichnet, die normierten orthogonalen Basisvektoren werden zusätzlich mit einem Tilde dekoriert, lauten also $\tilde{w_i}$.

Wir wählen $w_1 := b_1 = x + 1$ und normieren. Bei der Berechnung der Integrale können wir uns zunutze machen, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall verschwindet. Dies spart im weiteren Verlauf einiges an Rechenarbeit.

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 1)\ dx = \frac{8}{3}$$

Damit ist $\| w_1 \| = \sqrt{\frac{8}{3}}$ und wir erhalten für den ersten normierten Basisvekor

$$\tilde{w_1} = \sqrt{\frac{3}{8}}(x+1).$$

Der Ansatz für den zweiten (noch nicht normierten) Basisvektor lautet

$$w_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, \tilde{w_1} \rangle}{\langle \tilde{w_1}, \tilde{w_1} \rangle} \tilde{w_1}.$$

Das Skalarprodukt im Nenner ergibt 1, da $\tilde{w_1}$ bereits normiert ist. Daher bleibt das Skalarprodukt im Zähler zu berechnen.

$$\langle b_2, \tilde{w_1} \rangle = \sqrt{\frac{3}{8}} \int_{-1}^{1} (x^2 + x)(x+1) dx = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Damit ist

$$w_2 = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen noch das Skalarprodukt von $w_2$ mit sich selbst

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left( x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \left( x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)\ dx = \frac{2}{5},$$

um die Norm zu erhalten, $\parallel w_2 \parallel = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Damit lautet der zweite normierte Basisvektor

$$\tilde{w_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).$$

Eine mögliche Orthonormalbasis lautet demnach $ONB_U = \left\{\sqrt{\frac{3}{8}}(x+1), \sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right\}$.

b ) (3 Punkte) Ergänzen Sie die in a) gefundene Orthonormalbasis zu einer *Orthogonalbasis* des Raumes der Poylnome vom Grad $\leq 2$. Die Normierung des neuen Vektors ist nicht notwendig.

Wir wählen den Ansatz: $w_3 := ax^2 + bx + c$ und fordern $\begin{cases} \langle w_3, \tilde{w_1}\rangle \stackrel{!}{=} 0 \\ \langle w_3, \tilde{w_2}\rangle \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$. Wir berechnen

$$\langle w_3, \tilde{w_1}\rangle = \sqrt{\frac{3}{8}}\int_{-1}^{1}(x+1)(ax^2+bx+c)\,dx = \sqrt{\frac{3}{8}}\frac{2}{3}(a+b+3c)$$

$$\langle w_3, \tilde{w_2}\rangle = \sqrt{\frac{5}{2}}\int_{-1}^{1}(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})(ax^2+bx+c)\,dx = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{2}{30}(a+5b-5c)$$

und erhalten aus obiger Forderung, dass beide jeweils Null ergeben müssen, folgendes Gleichungssystem:

$$a + b + 3c = 0, \tag{1}$$

$$a + 5b - 5c = 0. \tag{2}$$

Zieht man (1) von (2) ab, so erhält man die Beziehung $4b - 8c = 0 \Rightarrow b = 2c$ Da wir drei Unbekannte, jedoch nur zwei Gleichungen haben, steht uns die Wahl eines Parameters frei. Wir wählen etwa $c = 1$ und erhalten $b = 2$. Durch Einsetzen in (1) bestimmen wir $a = -5$. Damit lautet der gesuchte Basisvektor

$$w_3 = -5x^2 + 2x + 1.$$

Laut Angabe ist keine Normierung gefordert.
Daher lautet eine Orthogonalbasis von $V$

$$OGB_V = \left\{ \sqrt{\frac{3}{8}}(x+1), \sqrt{\frac{5}{2}} \left( x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right), (-5x^2 + 2x + 1) \right\}.$$

Natürlich kann man die obige Überlegung mit $w_1$ statt $\tilde{w}_1$ und $w_2$ statt $\tilde{w}_2$ durchführen. Das Ergebnis für $w_3$ ändert sich nicht und die $OGB_V$ lautet dann

$$OGB_V = \left\{ x+1, x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, -5x^2 + 2x + 1 \right\}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben seien die Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, sowie die Basis $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

gilt. Weiter sei die Basis für $\mathbb{R}$ durch $E_1 = \{1\}$ gegeben. Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist mit Hilfe der Basen $B$ und $E_1$ definiert durch

$$[\phi(B)]_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow C}$ zum Basiswechsel von $C$ zu $B$.

Um die Matrix $T_{B \leftarrow C}$ zu erhalten, löst man drei lineare Gleichungssysteme. Dabei werden die Vektoren der alten Basis $C$ mit Hilfe der Vektoren der neuen Basis $B$ dargestellt,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Durch Zeilenumformungen erhält man

$$\xrightarrow{z_2 - 3z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_3 - z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{z_3 \leftrightarrow z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -7 \end{array}\right).$$

Man erhält durch Ablesen der rechten Seite

$$T_{B \leftarrow C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ -5 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\phi(C)]_{E_1}$ bezüglich der Basen $C$ und $E_1$.

Nach Satz 3.9 aus dem Vorlesungsskriptum gilt

$$[\phi(C)]_{E_1} = S_{E_1 \leftarrow E_1} \cdot [\phi(B)]_{E_1} \cdot T_{B \leftarrow C}.$$

Durch Einsetzen der bisherigen Ergebnisse erhält man

$$[\phi(C)]_{E_1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

c) (1 Punkt) Gegeben sei $[v]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Bild von $v$, $\phi(v) = [\phi(v)]_{E_1}$. Verwenden Sie dazu, die soeben gefundene Darstellung von $[\phi(C)]_{E_1}$.

$$[\phi(v)]_{E_1} = [\phi(C)]_{E_1} \cdot [v]_C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 18.$$

d) (2 Punkte) Berechnen Sie $[v]_B$ und das Bild von $v$, $\phi(v) = [\phi(v)]_{E_1}$, mit Hilfe der Abbildungsmatrix $[\phi(B)]_{E_1}$.

$$[v]_B = T_{B \leftarrow C} \cdot [v]_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$[\phi(v)]_{E_1} = [\phi(B)]_{E_1} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} = 18$$

Das Bild des Vektors ist erwartungsgemäß in beiden Darstellungen das gleiche.

e) (2 Zusatzpunkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow B}$ zum Basiswechsel von $B$ zu $C$.

Um die Matrix $T_{C \leftarrow B}$ zu erhalten, löst man drei lineare Gleichungssystem wie in a), allerdings mit Matrix B und C vertauscht, was dem Invertieren von $T_{B \leftarrow C}$ gleich kommt,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Zuerst tauschen wir die Zeilen des Gleichungssystems, anschließend wird durch Zeilenumformungen simultan gelöst.

$$\xrightarrow[\boldsymbol{z}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_2]{\boldsymbol{z}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 - 2\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{z}_3 + 3\boldsymbol{z}_1]{\boldsymbol{z}_1 - 2\boldsymbol{z}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{z}_3(-1)]{\boldsymbol{z}_1 + 2\boldsymbol{z}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus erhält man durch Ablesen der rechten Seite,

$$T_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Aufgabe 3.** Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Jordan'sche Normalform $J$ und die zugehörige Transformationsmatrix $X$ der gegebenen Matrix.

Zuerst gilt es die Eigenwerte der Matrix zu berechnen. Unter Zuhilfenahme des Laplace'schen Entwicklungsatzes lautet das charakteristische Polynom

$$(6-\lambda)\left[(6-\lambda)(2-\lambda)+4\right] \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir können sofort den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 6$ (mit $g_1 = k_1 = 1$) ablesen und erhalten aus $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit $k_2 = 2$. Nun bestimmen wir die Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten, beginnend mit $\lambda_1 = 6$

$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \neq 0.$$

Für $\lambda_2 = 6$ haben wir

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, s \neq 0.$$

Da wir keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor mehr finden, ist die geometrische Vielfachheit des zweiten Eigenwertes $g_2 = 1$. Wir müssen also einen Hauptvektor finden, der wiefolgt bestimmt wird: Sei $s$ fest,

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{h}_2 = s\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbf{R}.$$

Mit der Wahl $s = 2$ und $\sigma = 0$ erhält man $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten ergeben die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und die Eigenvektoren, sowie der Hauptvektor ergeben die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Es gilt $A = XJX^{-1}$.

b ) (2 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A$!

Mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz kann die gegebene Determinante vereinfacht werden, indem z.B. nach der 2. Zeile entwickelt wird,

$$det(A) = (-1)^4 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jeweils eine weitere Entwicklung (hier nach der 1.Spalte bzw. 2. Zeile) führt auf die Berechnung der Determinante von $3 \times 3$ Matrizen,

$$det(A) = \left[ 5 \cdot (-1)^2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^5 \cdot (-3) \cdot det \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] -$$

$$-2 \cdot \left[ (-1)^5 \cdot (-4) \cdot det \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right].$$

Die erste Determinante ist Null, weil die Matrix singulär ist, der Rest kann mit der Regel von Sarrus berechnet werden,

$$det(A) = 3 \cdot (24 - 4 - 12) - 8 \cdot (20 + 18 - 10 - 18) = -56.$$