Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2018

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 16.11.2018) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen ,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ∘

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die folgende Teilmenge von $\mathbb{P}_3$: $\mathbb{Q} := \mathcal{L}\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subset \mathbb{P}_3$, wobei

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x + x^2, \\ p_2(x) &= 3 + 2x + x^2 - 2x^3, \\ p_3(x) &= 1 + 3x - 2x^3, \\ p_4(x) &= 2 + 2x^2 \end{aligned}$$

sind. $\mathbb{P}_3$ sei der Raum der reellen Polynome von Grad ≤ 3.

a) (3.5 Punkte) Zeigen Sie, dass die obigen Polynome linear abhängig sind. Sie können die Aufgabe lösen, indem Sie zeigen, dass sich p_4 als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 darstellen lässt.

Der Ansatz für die Darstellung von p_4 über p_1, p_2 und p_3 lautet

$$s_1 \cdot p_1(x) + s_2 \cdot p_2(x) + s_3 \cdot p_3(x) = p_4(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Einsetzen der Polynome und dem Zusammenfassen der Potenzen ergibt die Gleichung

$$(3s_2 + s_3) + (s_1 + 2s_2 + 3s_3) \cdot x + (s_1 + s_2) \cdot x^2 - (2s_2 + 2s_3) \cdot x^3 = 2 + 2x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Damit die linke Seite für alle $x \in \mathbb{R}$ die gleichen Werte wie die rechte Seite der Gleichung hat, müssen die jeweiligen Koeffizienten vor den gleichen x-Potenzen den gleichen Wert haben (Koeffizientenvergleich):

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad 3s_2 + s_3 = 2, && (1) \\ x^1 &: \quad s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 0, && (2) \\ x^2 &: \quad s_1 + s_2 = 2, && (3) \\ x^3 &: \quad -2s_2 - 2s_3 = 0. && (4) \end{aligned}$$

Einsetzen für $s_3 = -s_2$ aus (4) in (1) liefert

$$3s_2 - s_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_3 = -1. \tag{5}$$

Das Resultat von (5) eingesetzt in die anderen zwei verbleibenden Gleichungen (2) und (3) ergibt das Gleiche:

$$\begin{aligned} s_1 - 1 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = 1, \\ s_1 + 1 &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = 1. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar, die Darstellung von p_4 ist daher mit

$$p_4(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_3(x)$$

gefunden.

b) (2.5 Punkte) Finden Sie eine Basis für $\mathbb{Q}$!

Da p_4 wie in Punkt a) gezeigt, von p_1, p_2 und p_3 linear abhängig ist, kann es sicher nicht Teil einer Basis sein, in der auch p_1, p_2 und p_3 vorhanden sind. Eventuell bilden $\{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis, zu zeigen ist hierfür deren lineare Unabhängigkeit. Beispielsweise damit, dass das Nullpolynom nur trivial dargestellt werden kann, also

$$s_1 \cdot p_1(x) + s_2 \cdot p_2(x) + s_3 \cdot p_3(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

so, dass das Gleichungssystem eindeutig $s_i = 0$ ergibt.
Einsetzen und Umformen führt auf

$$(3s_2 + s_3) + (s_1 + 2s_2 + 3s_3) \cdot x + (s_1 + s_2) \cdot x^2 - (2s_2 + 2s_3) \cdot x^3 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} x^0: &\quad 3s_2 + s_3 = 0, && (6)\\ x^1: &\quad s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 0, && (7)\\ x^2: &\quad s_1 + s_2 = 0, && (8)\\ x^3: &\quad -2s_2 - 2s_3 = 0. && (9) \end{aligned}$$

Die Summe von Gleichungen (6) und der Hälfte von (9) ergibt

$$3s_2 + s_3 - s_2 - s_3 \quad \Leftrightarrow \quad 2s_2 = 0$$

und damit auch nach Gleichung (6)

$$s_3 = 0.$$

Mit diesen Informationen folgt aus den Gleichungen (7) und (8) jeweils

$$s_1 = 0.$$

Es ist also nur die triviale Darstellung des Nullpolynoms möglich, was mit linearer Unabhängigkeit ident ist (nach Definition 1.9 im Skriptum). Eine Basis von $\mathbb{Q}$ ist also

$$\{p_1, p_2, p_3\}$$

bzw.

$$\mathbb{Q} = \mathcal{L}\{p_1, p_2, p_3\}.$$

- **Aufgabe 2.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 1x_2 + (s+1)x_3 + sx_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2sx_4 &= 0 \\ sx_1 + 1x_2 + (s+1)x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

a) (0.5 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s+1 & s \\ 2 & 4 & 2 & 2s \\ s & 1 & s+1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) (1.5 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ in Abhängigkeit von s. Für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen? Begründung!

Wende Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ an, um Aussagen über den Rang treffen zu können:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & s+1 & s & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2s & 0 \\ s & 1 & s+1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\boldsymbol{z}_3 - s\boldsymbol{z}_1]{\boldsymbol{z}_2 - 2\boldsymbol{z}_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & s+1 & s & 2 \\ 0 & 2 & -2s & 0 & -4 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 & 1-s^2 & 2(1-s) \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & s+1 & s & 2 \\ 0 & 2 & -2s & 0 & -4 \\ 0 & 1-s & (1-s)(1+s) & (1-s)(1+s) & 2(1-s) \end{array}\right)$$

Dies führt zu der Fallunterscheidung:

- $s = 1$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 2$
- $s \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$

D.h. das Gleichungssystem ist immer lösbar (unendlich viele Lösungen) und es existiert kein $s \in \mathbb{R}$, sodass keine Lösung existiert!

c) (4.0 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (falls sie existiert) in Abhängigkeit von s. Beachten Sie die Fallunterscheidung von Unterpunkt b) und nehmen Sie an, dass $s \neq -1$ gilt!

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Aus der reduzierten Matrix aus Unterpunkt b) lässt sich diese leichter berechnen.

- $s = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_2]{z_1 - \frac{1}{1}z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben zwei Gleichungen für vier Unbekannte, d.h. wir betrachten die Abhängigkeit der Unbekannten von zwei Parametern, z.B. $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \tag{10}$$
$$x_2 - x_3 = -2 \tag{11}$$

Aus (10) folgt $x_1 = 4 - 3x_3 - x_4$ und aus (11) folgt $x_2 = -2 + x_3$. Mit $x_3 := \alpha \in \mathbb{R}$ und $x_4 := \beta \in \mathbb{R}$ erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

- $s \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & s+1 & s & 2 \\ 0 & 2 & -2s & 0 & -4 \\ 0 & 1-s & (1-s)(1+s) & (1-s)(1+s) & 2(1-s) \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{1-s}\boldsymbol{z}_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & s+1 & s & 2 \\ 0 & 2 & -2s & 0 & -4 \\ 0 & 1 & s+1 & s+1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_2]{z_1-z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 & -2 \\ 0 & 1 & s+1 & s+1 & 2 \end{array}\right)$$

Wir haben drei Gleichungen für vier Unbekannte, d.h. wir betrachten die Abhängigkeit der Unbekannten von einem Parameter, z.B. $x_3 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 - x_4 = 0 \tag{12}$$

$$x_2 - sx_3 = -2 \tag{13}$$

$$x_2 + (s+1)x_3 + (s+1)x_4 = 2 \tag{14}$$

Aus (12) folgt $x_1 = x_4$ und aus (13) folgt $x_2 = -2 + sx_3$. Einsetzen in (14) ergibt:

$$\begin{aligned} & x_2 + (s+1)x_3 + (s+1)x_4 = 2 \\ & -2 + sx_3 + (s+1)x_3 + (s+1)x_4 = 2 \\ & (2s+1)x_3 + (s+1)x_4 = 4 \\ & x_4 = \frac{4}{s+1} - \frac{2s+1}{s+1} = x_1 \;\Rightarrow\; s \neq -1 \end{aligned}$$

Mit $x_3 := t \in \mathbb{R}$ erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{s+1} \\ -2 \\ 0 \\ \frac{4}{s+1} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2s+1}{s+1} \\ s \\ 1 \\ -\frac{2s+1}{s+1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (2 Punkte) Betrachten Sie nun die Menge

$$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_4 = 0, \quad x_4 - 2x_1 = 0\right\}$$

und zeigen Sie, dass $\mathbb{S}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Benützen Sie dazu das Unterraumkriterium. Argumentieren Sie Umformungsschritte sorgfältig mit den Rechenregeln in $\mathbb{R}$!

Wir verwenden das Unterraumkriterium:

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S} : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$
Für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$ gilt laut Bestimmungsgleichungen: $u_3 + u_4 = 0$, $u_4 - 2u_1 = 0$, sowie $v_3 + v_4 = 0$, $v_4 - 2v_1 = 0$. Es muss nun gezeigt werden, dass $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ die Bestimmungsgleichungen ebenfalls erfüllt. Dazu betrachtet man:

$$\begin{aligned}(u_3 + v_3) + (u_4 + v_4) &\overset{(2)}{=} (u_3 + v_3 + u_4) + v_4 \overset{(1)}{=} (u_3 + u_4 + v_3) + v_4 \\ &\overset{(2)}{=} (u_3 + u_4) + (v_3 + v_4) = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

und analog für die zweite Gleichung.

(ii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{S} \forall k \in \mathbb{R} : s\mathbf{u} \in \mathbb{S}$
Für beliebige $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt laut Bestimmungsgleichungen wieder: $u_3 + u_4 = 0$, $u_4 - 2u_1 = 0$. Es soll nun gezeigt werden, dass $k\mathbf{u}$ die Bestimmungsgleichungen ebenfalls erfüllt. Dazu betrachtet man:

$$(ku_4) - (k\ 2u_1) \overset{(4)}{=} (k\ u_4) + (-k\ 2u_1) \overset{(7)}{=} k(u_4 - 2u_1) = k\ 0 = 0. \quad \checkmark$$

und analog für die andere Gleichung.
Die Nummern über den Gleichheitszeichen beziehen sich auf die Rechenregeln laut Satz 1.1 aus dem Skriptum.

b) (2 Punkte) Gegeben sei zusätzlich der folgende Unterraum von $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{T} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 2x_3 + 4x_1 = 0, \quad x_4 - x_2 = 0 \right\}.$$

Finden Sie jeweils eine Basis von $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$.

Aus den definierenden Gleichungen für $\mathbb{S}$ erhält man $x_3 = -x_4$, $x_1 = \frac{x_4}{2}$. Damit folgt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_4}{2} \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{x_4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathbb{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ebenso folgen aus den Bestimmungsgleichungen für $\mathbb{T}$ die Beziehungen $2x_1 = -4x_3$ und $x_2 = x_4$. Damit erhält man

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet eine Basis $B_{\mathbb{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^4$ keine direkte Summe aus $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$ ist, d.h. $\mathbb{R}^4 \neq \mathbb{S} \bigoplus \mathbb{T}$. Geben Sie eine Basis und die Dimension von $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ an. Finden Sie auch eine Basis von $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Wir überprüfen, ob $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$ gilt. Dazu sei $\mathbf{y} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, also insbesondere $\mathbf{y} \in \mathbb{S}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{T}$. Dann existieren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{y} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da die verwendeten Vektoren laut c) eine Basis des jeweiligen Unterraums bilden. Auflösen der vier Gleichungen liefert $a = c$, $b = d$ und $2a = d$. Setzt man z.B. $a = 1$, so erhält man $c = 1$, $b = 2$ und $d = 2$ und damit $B_{\mathbb{S} \cap \mathbb{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
Daraus ist sofort ersichtlich, dass $dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.

Nach dem Dimensionssatz (Satz 1.12) folgt damit unmittelbar, dass $dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 3$. Die beiden Basisvektoren von $\mathbb{S}$ sind bereits linear unabhänging. Man sieht sofort, dass der zweite Basisvektor von $\mathbb{T}$ linear unabhängig von jenen von $\mathbb{S}$ ist. Damit haben wir ein maximal linear unabhängiges System, also eine Basis, gefunden.

Sie lautet $B_{\mathbb{S} + \mathbb{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.