

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (FR, 18.01.2019) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.**

Betrachten Sie V , den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 .

a) (3 Punkte) Welche der folgenden Abbildungen sind Skalarprodukte? Welche nicht? Begründen Sie!

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle_1 := \int_{-\infty}^1 f(x) \cdot e^{-x} \cdot g(x) dx \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle_2 := \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(x) \cdot g(x) dx \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_3 : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle_3 := \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cdot f(x) \cdot \cos(x) \cdot g(x) dx\end{aligned}$$

Beginnen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Sei $f(x) = g(x) = 1$.

Dann ist $\langle f, f \rangle_1 = \int_{-\infty}^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^1 = \infty$. Das auftretende Integral ist also gar nicht wohldefiniert. Demnach kann $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ kein Skalarprodukt sein.

Widmen wir uns nun $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ und setzen wieder $f(x) = g(x) = 1$. Dann ist

$\langle f, f \rangle_2 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \cos(x) \Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = 0$. Also ist $\langle 1, 1 \rangle_2 = 0$, obwohl $1 \neq 0$ ist. Also ist die positive Definitheit verletzt. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ ist also kein Skalarprodukt.

Kommen wir schlussendlich zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$. Das Integral von einem Produkt eines Polynoms mit einem Kosinus kann via partieller Integration berechnet werden, ist wohldefiniert und muss daher nicht explizit gezeigt (aber begründet!) werden. Symmetrie und Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ lassen sich auf Symmetrie und Linearität des Integrals zurückführen - sie werden also „geerbt“.

Die verbleibende Eigenschaft ist also die positive Definitheit.

Wir zeigen $\forall f \in V : \langle f, f \rangle_3 \geq 0, \quad \langle f, f \rangle_3 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

$$\langle f, f \rangle_3 = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^2 \cos(x) dx \geq 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^2 dx \geq 0 \quad (1)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass das Integral über die nichtnegative Funktion $(f(x))^2$ nichtnegativ ist. Da $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn $2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^2 dx = 0$ ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn $(f(x))^2 = 0$, also wenn $f(x) \equiv 0$. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ auch positiv definit und somit insgesamt ein Skalarprodukt.

Für den Rest des Beispiels verwenden Sie

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \cdot e^{-x} \cdot g(x) dx, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

als Skalarprodukt bzw. Norm. Sie müssen nicht beweisen, dass es sich dabei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt.

- b) (3 Punkte) Betrachten Sie den Unterraum U von V , der von $\{b_1, b_2\} = \{3, x - 2\}$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt!

Die Notation soll jener aus der Übung folgen - die orthogonalen Basisvektoren werden mit w_i bezeichnet, die normierten orthogonalen Basisvektoren sollen \tilde{w}_i genannt werden.

Wir wählen $w_1 := b_1 = 3$ und normieren diesen. Dazu berechnen wir

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 9 \int_{-1}^1 e^{-x} dx = 9 \frac{e^2 - 1}{e} \quad (2)$$

und erhalten $\|w_1\| = 3\sqrt{\frac{e^2-1}{e}}$ und somit $\tilde{w}_1 = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}$.

Der Ansatz für den zweiten, noch nicht normierten Basisvektor lautet

$$w_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, \tilde{w}_1 \rangle}{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1 \rangle} \tilde{w}_1.$$

Das Skalarprodukt im Nenner ergibt 1, da \tilde{w}_1 bereits normiert ist. Daher bleibt das Skalarprodukt im Zähler zu berechnen.

$$\begin{aligned} \langle b_2, \tilde{w}_1 \rangle &= \int_{-1}^1 (x-2)e^{-x} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} dx = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[\int_{-1}^1 x e^{-x} dx - 2 \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right] \\ &\stackrel{PI}{=} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[-x e^{-x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} dx - 2 \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[-e^{-1} - e^1 - \int_{-1}^1 e^{-x} dx \right] = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} [-e^{-1} - e^1 + e^{-1} - e^1] \\ &= -2e \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \end{aligned}$$

Damit ist $w_2 = x - 2 + 2e \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} = x + \frac{2}{e^2-1}$. Eine Orthogonalbasis von U lautet demnach

$$OGB_U = \left\{ \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}, x + \frac{2}{e^2-1} \right\}$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei eine Basis des \mathbb{R}^3 ,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

sowie die kanonische Basis E_3 .

- a) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow B}$ zum Basiswechsel von B zu E_3 sowie die Matrix $T_{B \leftarrow E_3}$ zum Basiswechsel von E_3 zu B !

Die Matrix zum Basiswechsel von B zu E_3 kann direkt aus der Angabe abgelesen werden:

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für den inversen Basiswechsel, also von E_3 zu B , müssen die drei kanonischen Basisvektoren in der Basis B dargestellt werden, was dem Lösen der Gleichungssysteme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

entspricht. Hierfür bietet sich die Gauss-Elimination an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 \leftrightarrow z_2 \\ z_3 - 2 \cdot z_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 + z_2 \\ z_3 - 2 \cdot z_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 - \frac{z_3}{2} \\ z_2 + \frac{z_3}{2}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix zu

$$T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $[\mathbf{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B , $[\mathbf{v}]_B$!

Die Darstellung ist durch das Produkt mit der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_3}$ gegeben:

$$[\mathbf{v}]_B = T_{B \leftarrow E_3} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- c) (1 Punkt) Gegeben sei weiter eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Matrixdarstellung

$$[\varphi(E_3)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der jeweiligen kanonischen Basen. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(B)]_{E_2}$ bezüglich der Basen B und E_2 !

$$[\varphi(B)]_{E_2} = [\varphi(E_3)]_{E_2} \cdot T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- d) (1,5 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Bilder $[\varphi(\mathbf{v})]_{E_2}$ der Vektoren $[\mathbf{v}]_{E_3}$ und $[\mathbf{v}]_B$ übereinstimmen!

Zuerst das Bild von $[\mathbf{v}]_{E_3}$:

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_2} = [\varphi(E_3)]_{E_2} \cdot [\mathbf{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt über die Verwendung der Abbildung zur Basis B:

$$[\varphi(\mathbf{v})]_{E_2} = [\varphi(B)]_{E_2} \cdot [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix A .

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda) \cdot ((2 - \lambda)^2 - 9) = (5 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{4 - (-5)} = 2 \pm 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5 \quad \text{mit} \quad n_1 = n_2 = 2,$$

$$\lambda_3 = -1 \quad \text{mit} \quad n_3 = 1.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren der Matrix A . Stellen Sie die Jordansche Normalform J und die dazugehörige Transformationsmatrix X auf.

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1.$$

$$(A - \lambda_3 I) \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 = 1.$$

Da $g_1 = 1 \neq n_1 = 2$ existiert ein Hauptvektor zu λ_1 :

$$(A - \lambda_1 I) \mathbf{h}_1 = \mathbf{v}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = XJ$ ist erfüllt ✓

