Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2018

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

2. Haupttest (FR, 18.01.2019) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. □

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Matrix: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix A.

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)\cdot((3-\lambda)^2 - 1) = (4-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 4 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = -\tfrac{-6}{2} \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \quad \text{mit} \quad n_1 = n_2 = 2,$$

$$\lambda_3 = 2 \quad \text{mit} \quad n_3 = 1.$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren der Matrix A. Stellen Sie die Jordansche Normalform J und die dazugehörige Transformationsmatrix X auf.

$$(A - \lambda_1 I)\,\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1.$$

$$(A - \lambda_3 I)\,\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 = 1.$$

Da $g_1 = 1 \neq n_1 = 2$ existiert ein Hauptvektor zu λ_1:

$$(A - \lambda_1 I)\,\mathbf{h_1} = \mathbf{v_1} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = (\mathbf{v_1}, \mathbf{h_1}, \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = XJ \text{ ist erfüllt } \checkmark$$

- **Aufgabe 2.**

Betrachten Sie V, den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2.

a) (3 Punkte) Welche der folgenden Abbildungen sind Skalarprodukte? Welche nicht? Begründen Sie!

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_1 := \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot f(x) \cdot \cos(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_2 := \int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot e^{-x} \cdot g(x)\, dx$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_3 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_3 := \int_{-\frac{1\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin(x) \cdot g(x)\, dx$$

Beginnen wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Sei $f(x) = g(x) = 1$.
Dann ist $\langle f,f\rangle_2 = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx = -e^{-x}|_{-\infty}^{0} = \infty$. Das auftretende Integral ist also gar nicht wohldefiniert. Demnach kann $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ kein Skalarprodukt sein.

Widmen wir uns nun $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ und setzen wieder $f(x) = g(x) = 1$. Dann ist
$\langle f,f\rangle_3 = \int_{-\frac{1\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) dx = \cos(x)|_{-\frac{1\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} = 0$. Also ist $\langle 1,1\rangle_3 = 0$, obwohl $1 \neq 0$ ist. Also ist die positive Definitheit verletzt. $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ ist also kein Skalarprodukt.

Kommen wir schlussendlich zu $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Das Integral von einem Produkt eines Polynoms mit einem Kosinus kann via partieller Integration berechnet werden, ist wohldefiniert und muss daher nicht explizit gezeigt(aber begründet!) werden. Symmetrie und Linearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ lassen sich auf Symmetrie und Linearität des Integrals zurückfürhen - sie werden also „geerbt“.
Die verbleibende Eigenschaft ist also die positive Definitheit.
Wir zeigen $\forall f \in V : \langle f,f\rangle_1 \geq 0, \quad \langle f,f\rangle_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

$$\langle f,f\rangle_1 = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (f(x))^2 \cos(x) dx \geq 4\cos(\frac{\pi}{3}) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (f(x))^2\, dx \geq 0 \tag{1}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass das Integral über die nichtnegative Funktion $(f(x))^2$ nichtnegativ ist. Da $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0$ ist, gilt Gleichheit genau dann, wenn $4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (f(x))^2\, dx = 0$ ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn $(f(x))^2 = 0$, also wenn $f(x) \equiv 0$.
Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ auch positiv definit und somit insgesamt ein Skalarprodukt.

Für den Rest des Beispiels verwenden Sie

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot e^{-x} \cdot g(x) dx, \quad \parallel f \parallel = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

als Skalarprodukt bzw. Norm. Sie müssen nicht beweisen, dass es sich dabei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt.

b) (3 Punkte) Betrachten Sie den Unterraum U von V, der von $\{b_1, b_2\} = \{2, x - 3\}$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt!

Die Notation soll jener aus der Übung folgen - die orthogonalen Basisvektoren werden mit w_i bezeichnet, die normierten orthogonalen Basisvektoren sollen $\tilde{w_i}$ genannt werden.

Wir wählen $w_1 := b_1 = 2$ und normieren diesen. Dazu berechnen wir

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 4 \int_{-1}^{1} e^{-x} dx = 4 \frac{e^2 - 1}{e} \tag{2}$$

und erhalten $\parallel w_1 \parallel = 2\sqrt{\frac{e^2-1}{e}}$ und somit $\tilde{w_1} = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}$.
Der Ansatz für den zweiten, noch nicht normierten Basisvektor lautet

$$w_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, \tilde{w_1} \rangle}{\langle \tilde{w_1}, \tilde{w_1} \rangle} \tilde{w_1}.$$

Das Skalarprodukt im Nenner ergibt 1, da $\tilde{w_1}$ bereits normiert ist. Daher bleibt das Skalarprodukt im Zähler zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\langle b_2, \tilde{w_1} \rangle &= \int_{-1}^{1} (x-3) e^{-x} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} dx = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[\int_{-1}^{1} x e^{-x} dx - 3 \int_{-1}^{1} e^{-x} dx \right] \\
&\overset{PI}{=} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[-x e^{-x} |_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x} dx - 3 \int_{-1}^{1} e^{-x} dx \right] \\
&= \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[-e^{-1} - e^{1} - 2 \int_{-1}^{1} e^{-x} dx \right] = \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \left[-e^{-1} - e^{1} + 2e^{-1} - 2e^{1} \right] \\
&= -\frac{3e^2 - 1}{e} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}
\end{aligned}$$

Damit ist $w_2 = x - 3 + \frac{3e^2-1}{e} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} \sqrt{\frac{e}{e^2-1}} = x + \frac{2}{e^2-1}$. Eine Orthogonalbasis von U lautet demnach

$$OGB_U = \left\{ \sqrt{\frac{e}{e^2-1}}, x + \frac{2}{e^2-1}. \right\}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei eine Basis des $\mathbb{R}^3$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\},$$

sowie die kanonische Basis E_3.

a) (2,5 Punkte) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow B}$ zum Basiswechsel von B zu E_3 sowie die Matrix $T_{B \leftarrow E_3}$ zum Basiswechsel von E_3 zu B!

Die Matrix zum Basiswechsel von B zu E_3 kann direkt aus der Angabe abgelesen werden:

$$T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 2 & 0\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Für den inversen Basiswechsel, also von E_3 zu B, müssen die drei kanonischen Basisvektoren in der Basis B dargestellt werden, was dem Lösen der Gleichungssysteme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

entspricht. Hierfür bietet sich die Gauss-Elimination an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 - z_1]{z_2 - 2\cdot z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{z_2}{4}]{z_1 + \frac{3}{4}\cdot z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_2 - z_3]{z_1 + z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix zu

$$T_{B \leftarrow E_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\-2 & -1 & 4\\4 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $[\boldsymbol{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B, $[\boldsymbol{v}]_B$!

Die Darstellung ist durch das Produkt mit der Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_3}$ gegeben:

$$[\boldsymbol{v}]_B = T_{B \leftarrow E_3} \cdot [\boldsymbol{v}]_{E_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) (1 Punkt) Gegeben sei weiter eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Matrixdarstellung

$$[\varphi(E_3)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der jeweiligen kanonischen Basen. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung $[\varphi(B)]_{E_2}$ bezüglich der Basen B und E_2!

$$[\varphi(B)]_{E_2} = [\varphi(E_3)]_{E_2} \cdot T_{E_3 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

d) (1,5 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Bilder $[\varphi(\boldsymbol{v})]_{E_2}$ der Vektoren $[\boldsymbol{v}]_{E_3}$ und $[\boldsymbol{v}]_B$ übereinstimmen!

Zuerst das Bild von $[\boldsymbol{v}]_{E_3}$:

$$[\varphi(\boldsymbol{v})]_{E_2} = [\varphi(E_3)]_{E_2} \cdot [\boldsymbol{v}]_{E_3} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt über die Verwendung der Abbildung zur Basis B:

$$[\varphi(\boldsymbol{v})]_{E_2} = [\varphi(B)]_{E_2} \cdot [\boldsymbol{v}]_B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$